На правах рукописи

Ушаков Андрей Леонидович

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ УПРУГОСТИ МЕТОДАМИ ИТЕРАЦИОННЫХ ФАКТОРИЗАЦИЙ

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

ЧЕЛЯБИНСК – 2017

Работа выполнена в ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, доцент
Загребина Софья Александровна

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Сукачева Тамара Геннадьевна,
ФГБОУ ВПО «Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого», кафедра алгебры и геометрии, зав. кафедрой;
кандидат физико-математических наук, доцент
Ряжских Александр Викторович,
ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический университет», кафедра прикладной математики и механики, доцент

Ведущая организация:
ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова».

Защита состоится 03 июля 2017 г. в 15:30 часов на заседании диссертационного совета Д212.298.14 при Южно-Уральском государственном университете, по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, ауд. 1001.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета и на сайте:
http://www.susu.ru/ru/dissertation/d-21229814/ushakov-andrey-leonidovich
Автореферат разослан 27 апреля 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук, доцент А.В. Келлер

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Различные физические явления могут быть описаны математическими моделями, в основе которых лежат уравнения в частных производных с определенными краевыми условиями. При этом стационарные, установившиеся процессы зачастую моделируются с помощью эллиптических уравнений второго и четвёртого порядков. Так, например, основой модели, описывающей перемещения мембран под действиями давлений, служит уравнение Пуассона. Отметим также, что в теории упругости уже более 200 лет известно уравнение Софи Жермен – Лагранжа. Оно является бигармоническим, и, рассмотренное с определенными краевыми условиями, моделирует перемещения пластин под действиями давлений.

В настоящее время существует множество направлений исследований таких моделей. Отметим, что их численные исследования методоми фиктивных компонент с естественными или главными краевыми условиями проводились Г.П. Астраханцевым, И.Е. Капориным, Ю.А. Кузнецовым, Г.И. Марчуком, А.М. Мацокиным, С.В. Непомнящих, Е.С. Николаевым. Позже в этом направлении работали, например, С.Б. Сорокин, X. Zhang и др. Методы фиктивных компонент, которые были применены в вышеперечисленных исследованиях для математических моделей с главными краевыми условиями сводились к задачам в прямоугольнике, причем численная реализация этих методов являлась либо неоптимальной по вычислительным затратам, либо неустойчивой. Поэтому в настоящее время возникла необходимость разработки численного метода для исследования этих математических моделей, устраняющего эти проблемы.

В данной работе предлагается последовательное применение модифицированного метода фиктивных компонент и метода итерационных факторизаций, что позволяет провести численное исследование методом, являющимся устойчивым и асимптотически оптимальным по числу арифметических операций. Такой подход отличается от методов, используемых предыдущими исследователями. Поэтому это исследование является актуальным.

Диссертация посвящена исследованию следующих математических моделей:

– **математическая модель перемещений точек прямоугольной мембраны на упругом основании, под действием давлений, закреплённой на двух смежных сторонах**.

$$-\Delta u + \kappa u = f \text{ в } \Omega, \ u\big|_{\Gamma_1} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_2} = 0, \qquad (1)$$

где прямоугольная область $\Omega = (0;b_1)\times(0;b_2)$, с границей

$\partial\Omega = \overline{s}$, $s = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, $\Gamma_1 = \{b_1\}\times(0;b_2)\bigcup(0;b_1)\times\{b_2\}$, $\Gamma_2 = \{0\}\times(0;b_2)\bigcup(0;b_1)\times\{0\}$,

$\vec{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$, $\kappa \geq 0$.

– **математическая модель перемещений точек прямоугольной пластины на упругом основании под действием давлений, где на двух смежных сторонах однородные условия шарнирного опирания, а на двух других сторонах однородные условия симметрии**

$$\Delta^2 u + au = f \text{ в } \Omega, \ u\big|_{\Gamma_1} = \Delta u\big|_{\Gamma_1} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \Delta u}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_2} = 0, \qquad (2)$$

где прямоугольная область $\Omega = (0;b_1)\times(0;b_2)$, с границей

$\partial\Omega = \overline{s}$, $s = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, $\Gamma_1 = \{b_1\}\times(0;b_2)\bigcup(0;b_1)\times\{b_2\}$, $\Gamma_2 = \{0\}\times(0;b_2)\bigcup(0;b_1)\times\{0\}$,
$\vec{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$, при этом $a = a_1 \geq 0$ в области Ω_1, $a = a_2 \geq 0$ в $\Omega \setminus \Omega_1$, области Ω_1, Ω_2: $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \bigcup \overline{\Omega}_2$, $\Omega_1 \bigcap \Omega_2 = \varnothing$, $\partial\Omega_1 \bigcap \partial\Omega_2 \neq \varnothing$.

– **математическая модель перемещений точек пластины на упругом основании под действием давлений, где на соответствующих краях однородные условия жёсткой заделки, шарнирного опирания, симметрии и свободного опирания**

$$\Delta^2 u + au = f \text{ в } \Omega, \tag{3}$$

$$u\big|_{\Gamma_0} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_0} = 0,\ u\big|_{\Gamma_1} = l_1 u\big|_{\Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_2} = l_2 u\big|_{\Gamma_2} = 0,\ l_1 u\big|_{\Gamma_3} = l_2 u\big|_{\Gamma_3} = 0, \tag{4}$$

где $n_1 = -\cos(n,x)$, $n_2 = -\cos(n,y)$,

$$l_1 u = \Delta u + (1-\sigma) n_1 n_2 u_{xy} - n_2^2 u_{xx} - n_1^2 u_{yy},$$

$$l_2 u = \frac{\partial \Delta u}{\partial \vec{n}} + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}(n_1 n_2 (u_{yy} - u_{xx}) + (n_1^2 - n_2^2) u_{xy}),$$

ограниченная плоская область Ω с кусочно-гладкой границей класса C^2 без самопересечений и самокасаний

$$\partial\Omega = \overline{s},\ s = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3,\ \Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing, \text{ если } i, j = 0,1,2,3,$$

Γ_i, $i = 0,1,2,3$ – объединения конечного числа непересекающихся, открытых подмножеств границы $\partial\Omega$ из дуг гладких кривых класса C^2, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$, $a \ge 0$, $\sigma \in (0;1)$.

Цель работы аналитическое и численное исследования математических моделей теории упругости методами итерационных факторизаций с последующей реализацией алгоритмов численных методов в виде комплекса программ. Для достижения данной цели необходимо решить следующие **задачи:**

1. Разработать приближенный аналитический метод для исследований математической модели перемещений прямоугольной пластины, модифицировать методы фиктивных компонент для исследований математических моделей перемещений пластин на непрерывном уровне.
2. Разработать численный метод итерационных факторизаций для вычислений перемещений прямоугольных мембран, пластин и модифицировать численные методы фиктивных компонент для вычислений перемещений пластин.
3. Реализовать в виде программ на ЭВМ алгоритмы численных методов и провести вычислительные эксперименты.

Научная новизна

В области математического моделирования.

Разработан аналитический приближенный метод для исследований математической модели перемещений прямоугольной пластины при шарнирном закреплении на двух смежных сторонах и условиях симметрии на двух других сторонах. Для исследования рассматриваемых моделей перемещений пластин на непрерывном уровне проведена модификация методов фиктивных компонент. Получены оценки сходимости приближенных решений к точным решениям.

В области численных методов.

Разработаны новые численные методы итерационных факторизаций, асимптотически оптимальные по количеству арифметических операций, для вычислений перемещений прямоугольных мембран и пластин при найденных и указанных смешанных краевых условиях. Эффективно модифицированы численные методы фиктивных компонент для вычислений перемещений пластин. Установлена сходимость итерационных решений к точным решениям с геометрической скоростью.

В области комплексов программ.

Разработан комплекс программ для вычислений перемещений прямоугольных мембран и пластин, позволяющий проводить вычислительные эксперименты для модельных задач, исследовать эффективность разработанных методов.

Методы исследования. В работе использовались методы математической физики, методы фиктивных компонент и численные методы решения краевых задач с естественными или главными условиями.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные модифицированные методы фиктивных компонент и метод итерационных факторизаций вносят вклад в развитие методов решения краевых задач для эллиптических уравнений второго и четвёртого порядков. Разработанные численные методы используются при вычислениях перемещений мембран и пластин. Использование этих численных методов предоставляет возможности экономии материальных ресурсов, времени вычислений на ЭВМ. Практическая значимость работы заключается в применении результатов исследования в различных предметных областях, поскольку эллиптические уравнения описывают помимо теории упругости процессы в электротехнике, теплотехнике, гидродинамике.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на 5 Школе молодых математиков Сибири и Дальнего Востока (Новосибирск, 1990), на 64 – 67 научных конференциях профессорско-преподавательского состава ЮУрГУ (Челябинск, 2012 – 2015), на 7 научной конференции аспирантов и докторантов ЮУрГУ (Челябинск, 2015). Результаты работы апробированы на XVI международной научной конференции, посвященной 75-летию профессора В.П. Дьяконова «Системы компьютерной математики и их приложения» (Смоленск, 2015); международной научно-практической конференции «Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий» (Сочи, 2015); международной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (Улан-Уде, 2015). Результаты диссертационного исследования представлялись на шестнадцатом всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (летняя сессия, Челябинск, 2015).

Результаты диссертации докладывались на областном семинаре «Уравнения соболевского типа» профессора Г.А. Свиридюка (Челябинск, 2015, 2016); на семинаре профессора С.И. Кадченко на кафедре прикладной математики и информатики МГТУ (Магнитогорск, 2015); на семинаре профессора Ю.И. Сапронова на кафедре математического моделирования ВГУ (Воронеж, 2015).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 20 работ [1–20], в том числе, 4 статьи опубликованы в ведущих рецензируемых научных изданиях и журналах, рекомендованных ВАК РФ при Минобрнауки РФ [1–4], из них 1 работа Scopus [4], 3 статьи Zentralblatt MATH [1–3]. Имеется также 2 свидетельства о регистрации программ для ЭВМ [5, 6]. В диссертацию из работ, выполненных с другими соавторами [5, 6], вошли только результаты, принадлежащие лично автору.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы, списка обозначений и приложения. Объём диссертации составляет 122 страницы. Список литературы содержит 107 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во введении обосновывается актуальность, рассматривается историография вопроса. Формулируются цель и задачи работы, указываются методы исследования, отмечены научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, перечислены положения, выносимые на защиту, отражается степень достоверности и апробации результатов, приводится структура и объем работы

В **первой главе** исследуются математические модели перемещений *прямоугольных мембран*, закрепленных на двух смежных сторонах. В п. 1.1 описываются две математические модели в операторной и вариационной постановках, основанные на уравнении Пуассона и экранированном уравнении Пуассона в прямоугольной области при однородных смешанных краевых условиях. В п. 1.2 методом сумматорных тождеств модели из п. 1.1 редуцируются к системам линейных алгебраических уравнений. В п. 1.3. строятся продолжения дискретных моделей из п. 1.2. В п. 1.4 разрабатываются методы итерационных факторизаций для решения задач из п. 1.3. Чтобы решить с относительной погрешностью ε систему линейных алгебраических уравнений п. 1.2, в которой N неизвестных, построенными итерационными процессами при выборе итерационных параметров с помощью вариационных методов, требуется $O(N|\ln\varepsilon|)$ операций. В п. 1.5

разрабатываются алгоритмы, реализующие методы итерационных факторизаций. П. 1.6 реализует алгоритм численного метода итерационных факторизаций для конкретной модельной задачи. Вычислительные эксперименты подтверждают асимптотическую независимость числа итераций от параметров дискретизации. Приводятся рекомендации по использованию полученных результатов для исследования математических моделей, в основе которых лежат эллиптические уравнения второго порядка, поскольку предложенные автором методы исследования математической модели, основанной на уравнении Пуассона, асимптотически оптимальны по вычислительным затратам.

Во **второй главе** исследуется *математическая модель перемещений прямоугольной пластины* (2) при шарнирном опирании на двух смежных сторонах и условиях симметрии на двух других сторонах. В п. 2.1 эта математическая модель рассматривается в вариационной постановке

$$u \in V : \Lambda(u,v) = g(v) \ \forall v \in V, \ \ g \in V', \tag{5}$$

где $V = V(\Omega) = \left\{ v \in W_2^2(\Omega) : v\big|_{\Gamma_1} = 0, \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma_2} = 0 \right\}$ – соболевское пространство функций, а билинейная форма и линейный функционал соответственно имеют вид: $\Lambda(u,v) = \int\limits_{\Omega} (\sigma \Delta u \Delta v + (1-\sigma)(u_{xx}v_{xx} + 2u_{xy}v_{xy} + u_{yy}v_{yy}) + auv) d\Omega$, $\sigma \in (0;1)$ и $g(v) = \int\limits_{\Omega} fv d\Omega$.

В п. 2.2 разрабатывается приближенный аналитический метод, итерационный процесс для решения задачи из п. 2.1:

$$u^k \in V : \mathrm{M}(u^k - u^{k-1}, v) = -\tau_k (\Lambda(u^{k-1}, v) - g(v)) \quad \forall v \in V, \tag{6}$$

$$\tau_k = 2\lambda^2 / (2\lambda^2 + a_2), k \in \mathbb{N}, \ \lambda = (0{,}5\pi/b_1)^2 + (0{,}5\pi/b_2)^2, \ u^0 = 0 \ \ (a_1 \le a_2).$$

$$\mathrm{M}(u,v) = \int\limits_{\Omega} \Delta u \Delta v d\Omega, \ \ \|v\|_V = \sqrt{\Lambda(v,v)}.$$

Теорема 1. *Для итерационного процесса (6) имеют место оценки*

$$\left\|u^k - u\right\|_V \le \varepsilon \left\|u\right\|_V,\ \varepsilon = \left(a_2/(2\lambda^2 + a_2)\right)^k,\ k \in \mathbb{N}.$$

В п. 2.3 производится дискретизация задачи из п. 2.1 методом конечных элементов на параболических восполнениях.

$$\overline{u} \in \mathbb{R}^N:\ \Lambda\overline{u} = \overline{g},\ \overline{g} \in \mathbb{R}^N. \tag{7}$$

В п. 2.4 вводится норма $\left\|\overline{v}\right\|_\Lambda = \sqrt{\left\langle \Lambda\overline{v}, \overline{v}\right\rangle}$, $\forall \overline{v} \in \mathbb{R}^N$. Строится итерационный процесс

$$\overline{u}^k \in \mathbb{R}^N:\ A^2(\overline{u}^k - \overline{u}^{k-1}) = -\tau_k(\Lambda\overline{u}^{k-1} - \overline{g}),\ \tau_k > 0,\ k \in \mathbb{N},\ \overline{u}^0 = \overline{0} \in \mathbb{R}^N, \tag{8}$$

где матрица A получается при аппроксимации краевой задачи для уравнения Пуассона из модели (1) методом конечных разностей

Теорема 2. *В итерационном процессе (8) оценки*

$$\left\|\overline{u}^k - \overline{u}\right\|_\Lambda \le \varepsilon \left\|\overline{u}\right\|_\Lambda,\ \varepsilon \in (0;1),\ k \in \mathbb{N}$$

достигаются за $\mathrm{O}(N \ln^2 \varepsilon)$ *арифметических операций при выборе итерационных параметров* τ_k *по методу минимальных поправок.*

В п. 2.5 излагается алгоритм, реализующий метод итерационных факторизаций из п. 2.4. П. 2.6 посвящен алгоритму, реализующему метод итерационных факторизаций для решения модельной задачи из п. 2.1. Получены результаты вычислительных экспериментов, подтверждающие асимптотическую независимость числа итераций от параметров дискретизации для достижения заданной относительной погрешности 0,001. Если заменить матрицу Λ матрицей $A^2 + aE$, при $a = 0$, задать компоненты правой части системы линейных алгебраических уравнений

$$g_{m(i-1)+j} = f_{i,j} = 6((b_1^2 - ((i-0,5)h_1)^2)(5b_1^2 - ((i-0,5)h_1)^2) +$$
$$+12(b_1^2 - ((i-0,5)h_1)^2)(b_2^2 - ((j-0,5)h_2)^2) + (b_2^2 - ((j-0,5)h_2)^2)(5b_2^2 - ((j-0,5)h_2)^2)),$$

$$i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n,\ m = n = 2,\dots,125,\ h_1 = b_1/(m+0,5),\ h_2 = b_2/(n+0,5),\ b_1 = b_2 = 2,5,$$

то, после двукратного применения метода итерационных факторизаций из главы 1, достигается асимптотическая независимость количества итераций от числа узлов сетки. Это подтверждает график функции k – числа итераций от $m(n)$ – числа узлов сетки по направлениям осей $0x(0y)$ (рис.1).

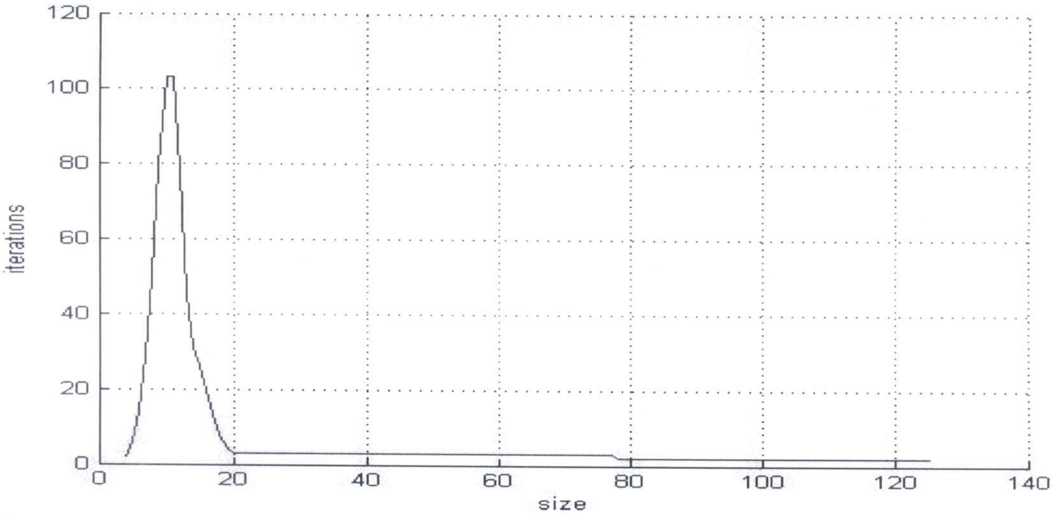

Рис.1

Приводятся рекомендации по использованию полученных результатов для исследования математических моделей, основанных на эллиптических уравнениях высших порядков, поскольку разработанные автором методы исследования математической модели, основанной на уравнении четвертого порядка, оптимальны по скорости сходимости приближенных решений к точному.

В **третьей главе** исследуется *продолжаемая математическая модель перемещений прямоугольной пластины* (2) при шарнирном опирании на двух смежных сторонах и условиях симметрии на двух других сторонах. В п. 3.1 рассматривается математическая модель, основой которой является эллиптическое уравнение четвертого порядка в прямоугольной области при однородных смешанных краевых условиях, в двух постановках операторной и вариационной. В п. 3.2 проводится дискретизация задачи из п. 3.1 методом конечных элементов на параболических восполнениях. В п. 3.3 строится продолжение дискретной модели из п. 3.2. В п. 3.4 для решения задачи из п. 3.3 разрабатывается итерационный процесс. Для решения задачи из п. 3.2 с N неизвестными, на основании построенного итерационного процесса с относительной погрешностью ε, требуется $O(N|\ln\varepsilon|)$ операций. В п. 3.5 излагается алгоритм, реализующий метод итерационных факторизаций из п. 3.4. В п. 3.6 проводится вычислительный эксперимент, реализующий алгоритм метода итерационных факторизаций для решения модельной задачи.

В **четвёртой главе** исследуются две математические модели перемещений пластин *в ограниченных областях на плоскости* при однородных смешанных краевых условиях. В п. 4.1 эти модели представлены в операторных и вариационных постановках. В п. 4.2 строятся продолжения непрерывных задач и их решений, разрабатываются модификации методов фиктивных компонент на непрерывном уровне. В п. 4.3 производится дискретизация продолженных моделей из п. 4.2. Разрабатываются модификации методов фиктивных компонент на дискретном уровне. Для решения задач с N неизвестными с использованых построенных итерационных процессов из п. 4.3 с относительной погрешностью ε, требуется $O(N\ln^2\varepsilon)$ операций при продолжении через границу с условиями Неймана, $O(N(\ln N+|\ln\varepsilon|)|\ln\varepsilon|)$ операций при продолжении через границу с условиями Дирихле. В п. 4.4 излагаются алгоритмы, реализующие модифицированные методы фиктивных компонент. Приводятся рекомендации по использованию полученных результатов для дальнейшего исследования математической модели, основанной на эллиптическом уравнении четвертого порядка при краевых условиях Дирихле.

В заключении приведены основные результаты работы.

Результаты, выносимые на защиту:

В рамках развития качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей:

1. Приближенный аналитический метод итерационных факторизаций для исследования математических моделей перемещений прямоугольной пластины.

2. Модификации методов фиктивных компонент на непрерывном уровне для исследования математических моделей перемещений пластин.

В рамках разработки, обоснования и тестирования эффективных вычислительных методов с применением современных технологий:

3. Асимптотически оптимальные численные методы итерационных факторизаций для вычислений перемещений прямоугольных мембран и пластин.

4. Модификации методов фиктивных компонент на дискретном уровне для вычислений перемещений пластин.

В рамках реализации эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента:

5. Программы для ЭВМ, реализующие методы итерационных факторизаций для вычислений перемещений прямоугольных мембран и пластин в базисных, модельных краевых задачах.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в ведущих рецензируемых научных изданиях и журналах, рекомендованных ВАК РФ при Минобрнауки РФ

1. Ушаков, А.Л. Модификация итерационной факторизации для численного решения двух эллиптических уравнений второго порядка в прямоугольной области / А.Л. Ушаков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика, Механика, Физика. – 2013. – Т. 5, №2. – С. 88–93. (Zbl 1331.65169)

2. Ушаков, А.Л. Итерационная факторизация для численного решения эллиптического уравнения четвёртого порядка в прямоугольной области / А.Л. Ушаков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика, Механика, Физика. – 2014. – Т. 6, №1. – С. 42–49. (Zbl 1343.65139)

3. Ушаков, А.Л. Итерационная факторизация на фиктивном продолжении для численного решения эллиптического уравнения четвёртого порядка / А.Л. Ушаков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика, Механика, Физика. – 2014. – Т. 6, №2. – С. 17–22. (Zbl 1343.65145)

4. Ушаков, А.Л. О моделировании деформаций пластин / А.Л. Ушаков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Мат. моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, №2. – С. 138–142. (SCOPUS)

Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ

5. Численное моделирование деформации квадратной мембраны, закреплённой на двух смежных сторонах: свидетельство № 2014613985 / Ушаков А.Л., Бухарин И.Ю. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». - 2014611376; заявл. 24.02.2014; зарегистр. 14.04.2014, реестр программ для ЭВМ.

6. Численное моделирование перемещений пластины под действиями давлений при однородных краевых условиях: свидетельство № 2015661153 / Ушаков А.Л., Артес Н.О. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». - 2015618103; заявл. 04.09.2015; зарегистр. 20.10.2015, реестр программ для ЭВМ.

Другие научные публикации

7. Ушаков, А.Л. Метод фиктивных компонент для приближённого решения эллиптического дифференциального уравнения четвёртого порядка / А.Л. Ушаков; Челяб. политехн. ин-т. – Челябинск, 1989. – 29 с. – Библ.: – 11 назв. – Деп. в ВИНИТИ АН СССР 25.05.1989, № 3480-В1989.

8. Ушаков, А.Л. Метод фиктивных компонент на непрерывном уровне / А.Л. Ушаков; Челяб. политехн. ин-т. – Челябинск, 1989. – 15 с. – Библ.: – 4 назв. – Деп. в ВИНИТИ АН СССР 28.12.1989, № 7717-В1989.

9. Ушаков, А.Л. Метод итерационного расщепления для специальных эллиптических краевых задач / А.Л. Ушаков; Челяб. политехн. ин-т. –

Челябинск, 1990. – 32 с. – Библ.: – 16 назв. – Деп. в ВИНИТИ АН СССР 23.11.1990, № 5892-В1990.

10. Ушаков, А.Л. Модификация метода фиктивных компонент при несимметричном расширении / А.Л. Ушаков; Челяб. гос. техн. ун-т. – Челябинск, 1991. – 25 с. – Библ.: – 10 назв. – Деп. в ВИНИТИ АН СССР 23.05.1991, № 2114-В1991.

11. Ушаков, А.Л. Модификация метода фиктивных компонент / А.Л. Ушаков; Челяб. гос. техн. ун-т. – Челябинск, 1991. – 40 с. – Библ.: – 13 назв. – Деп. в ВИНИТИ АН СССР 11.11.1991, № 4232-В1991.

12. Ушаков, А.Л. Метод итерационной факторизации / А.Л. Ушаков; Челяб. гос. техн. ун-т. – Челябинск, 1994. – 31 с. – Библ.: – 17 назв. – Деп. в ВИНИТИ РАН 17.10.1994, № 2375-В1994.

13. Ушаков, А.Л. О приближённом решении одной эллиптической краевой задачи четвёртого порядка / А.Л. Ушаков; Челяб. гос. техн. ун-т. – Челябинск, 1997. – 30 с. – Библ.: – 12 назв. – Деп. в ВИНИТИ РАН 21.04.1997, № 1346-В1997.

14. Ушаков, А.Л. Моделирование итерационной факторизации для эллиптической краевой задачи второго порядка / А.Л. Ушаков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика, физика, химия. – 2006. – Вып. 7, №7 (62). – С. 64–70.

15. Ушаков, А.Л. Моделирование итерационной факторизации для эллиптического уравнения четвертого порядка / А.Л. Ушаков // Изв. Челяб. науч. центра УрО РАН. – 2007. – Вып. 1 (35). – С. 33–36.

16. Ушаков, А.Л. Модификация метода фиктивных компонент для численного решения эллиптических краевых задач четвёртого порядка / А.Л. Ушаков // Математические модели и теория групп: сб. науч. тр. каф. общей математики Юж.-Урал. гос. ун-та. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – С. 61–65.

17. Ушаков, А.Л. Метод фиктивных компонент для эллиптических дифференциальных уравнений / А.Л. Ушаков // 5 Школа молодых математиков Сибири и Дальнего Востока: тез. докл., Новосибирск, 10-16 декабря 1990 года. – Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1990. – С. 123.
18. Ушаков, А.Л. Математическое моделирование деформаций пластин на упругих основаниях / А.Л. Ушаков // Наука ЮУрГУ: сб. тр. 67-й науч. конф. ЮУрГУ, Челябинск, 14-17 апреля 2015 года. – Челябинск, ЮУрГУ, 2015. – С. 75-83.
19. Ушаков, А.Л. Численное моделирование деформации прямоугольной пластины / А.Л. Ушаков // Системы компьютерной математики и их приложения: тез. докл. XVI Междунар. науч. конф., посвященной 75-летию профессора В.П. Дьяконова, Смоленск, 15-17 мая 2015 года. – Смоленск: СмолГУ, 2015. – Вып. 16. – С. 222.
20. Ушаков, А.Л. Численное моделирование деформации мембраны / А.Л. Ушаков // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование: тез. докл. междунар. науч. конф., Улан-Уде, 22-27 июня 2015 года. – Улан-Уде: ВСГУТУ, 2015. – С. 291-292.

Типография «Два комсомольца»
Подписано в печать 25.04.2017. Формат 60×84 1/16
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 1.
Тираж 100 экз. Заказ 581/813
Отпечатано в типографии «Два комсомольца».
454008, г. Челябинск, Комсомольский пр., 2