На правах рукописи

Ушаков Андрей Леонидович

АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИОННЫХ РАСШИРЕНИЙ

2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

доктора физико-математических наук

ЧЕЛЯБИНСК – 2023

Работа выполнена в ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)»

Научный консультант:

Загребина Софья Александровна,
доктор физико-математических наук, профессор.

Официальные оппоненты:

Кризский Владимир Николаевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский горный университет»,
кафедра информатики и компьютерных технологий,
заведующий кафедрой;

Ряжских Виктор Иванович,
доктор технических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», кафедра прикладной математики и механики,
заведующий кафедрой;

Пятков Сергей Григорьевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Югорский государственный университет»,
Инженерная цифровая школа, профессор.

Ведущая организация:

ФГБУН Институт проблем управления
им. В. А. Трапезникова РАН.

Защита состоится 09 ноября 2023 г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.437.11 при Южно-Уральском государственном университете, по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, ауд. 1001.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета и на сайте:
http://www.susu.ru/ru/dissertation/24243711/ushakov-andrey-leonidovich

Автореферат разослан ____ июля 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
канд. физ.-мат. наук, доцент Е.В. Бычков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Уже более 200 лет ученые изучают важную проблему математики и механики – **бигармоническую проблему**. С позиции механики суть бигармонической проблемы можно продемонстрировать на следующем примере. Рассмотрим физическую систему – тонкую прямоугольную пластину, жёстко защемлённую по её сторонам, под действием внешнего нормального давления. В этой системе необходимо найти прогибы срединной плоскости пластины, которая делит толщину пластины пополам.

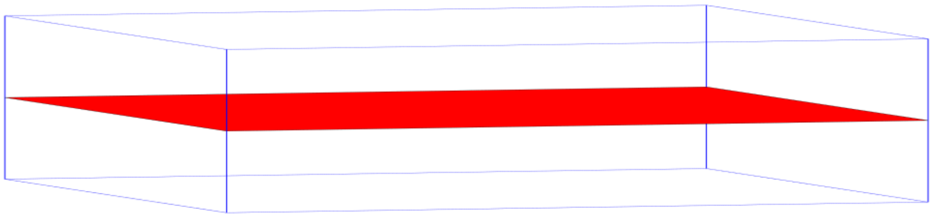

Рис. 1. Тонкая прямоугольная пластина со срединной плоскостью

Вычисления прогибов пластин и мембран являются сложными и актуальными задачами, что связано с активным использованием решений задач такого типа в строительстве гражданских и промышленных зданий, подводных лодок, кораблей, самолетов, ракет и других объектов. Общепринятым подходом к изучению этих объектов, является использование их математических описаний на основе бигармонических и гармонических уравнений. Несмотря на существующие методы и подходы, используемые на практике, данные задачи имеют много нерешенных проблем при поиске точных, приближенных и численных решений.

Актуальность темы видна по маштабному обзору В.В. Мелешко[1], содержащему список более 700 работ за почти 200 лет по анализу бигармонической проблемы. Например, в шаре В.В. Карачиком были предложены полиномиальные решения задачи Дирихле для уравнения Софи Жермен. Тем не менее, прямые аналитические методы решения таких задач в областях со сложной геометрией отсутствуют. Так же не разработаны асимптотически оптимальные по количеству операций численные методы решения этой задачи даже в квадратной области. Трудности численного решения этой задачи отмечали С.Д. Алгазин, Г.Х. Соловьев, Н.Н. Анучина, К.И. Бабенко, С.К. Годунов, Е.Г. Дьяконов, С.П. Павлов, М.В. Жигалов, В.И. Ряжских, М.И. Слюсарев, М.И. Попов и др. Таким образом, решение бигармонического уравнения в геометрически сложных областях именно с краевым условием Дирихле

[1] Мелешко В.В. Бигармоническая задача для прямоугольника: История и современность // Математические методы и физико-механические поля. 2004. Т. 47, № 3, 45-68. (Zbl 1090.74036)

является проблемной задачей. Следовательно, актуальна разработка асимптотически оптимального по количеству операций итерационного метода решения проблемных краевых задач для уравнений Софи Жермен, Пуассона и задачи представления линейного функционала в виде скалярного произведения для анализа соответствующих бигармонических, гармонических и скалярных систем.

Отметим, что в данном диссертационном исследовании для описания стационарных физических систем прогиба пластин и мембран применяются известные краевые задачи для уравнений Софи Жермен и Пуассона. Получаемые бигармонические и гармонические системы фиктивно продолжаются и аппроксимируются по методу конечных элементов. Используется вложение рассматриваемых систем в более сложные системы, обозначаемые как продолженные и расширенные системы. Возникающие при этом задачи решаются разработанным методом итерационных расширений. Для ускорения сходимости этого метода используются связи между физическими величинами жесткости упругого основания, цилиндрической жесткости пластины или коэффициентом натяжения мембраны на продолжении систем и дополнительными параметрами итерационного метода. Формулировка достаточных условий сходимости итерационного процесса использует междисциплинарные связи с функциональным анализом, применяя дискретные аналоги положений о продолжении функций с сохранением нормы и класса.

При алгоритмической реализации метода итерационных расширений действует автоматизация управления выбором значения оптимального итерационного параметра при обработке информации. Таким образом, анализ бигармонических, гармонических и скалярных систем методом итерационных расширений заключается в построении асимптотически оптимальных по количеству операций решений соответствующих им задач. Разработанный в диссертации метод итерационных расширений при асимптотически оптимальном по количеству операций решении задач, рассматриваемых стационарных физических систем, направлен на применение ЭВМ.

Стоит подчекнуть, что учитываются специфические свойства рассматриваемых бигармонических, гармонических и скалярных систем, но существенно используются их общие свойства при разработке метода итерационных расширений.

Настоящая диссертация посвящена разработке нового научного направления, в основе которого лежит метод итерационных расширений для анализа стационарных физических систем, описываемых системами:

– бигармоническая система – смешанная краевая задача для неоднородного бигармонического уравнения о вертикальном перемещении точек пластины, расположенной горизонтально,

под действием вертикального давления с однородными краевыми условиями защемления, шарнирного опирания, симметрии и свободного края

$$u:\Delta^2\breve{u}=\breve{f}\big|_{\Omega},\ \Omega\subset\mathbb{R}^2, \tag{1}$$

$$\breve{u}=\frac{\partial\breve{u}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_0}=0,\ \breve{u}=l_1\breve{u}\Big|_{\Gamma_1}=0,\ \frac{\partial\breve{u}}{\partial n}=l_1\breve{u}\Big|_{\Gamma_2}=0,\ l_1\breve{u}=l_2\breve{u}\Big|_{\Gamma_3}=0,$$

где

$$\partial\Omega=\bar{s},\ s=\Gamma_0\bigcup\Gamma_1\bigcup\Gamma_2\bigcup\Gamma_3,\ \Gamma_i\bigcap\Gamma_j=\varnothing,\ i\neq j,\ i,j=0,1,2,3,$$

$$l_1\breve{u}=\Delta\breve{u}+(1-\sigma)n_1n_2\breve{u}_{xy}-n_2^2\breve{u}_{xx}-n_1^2\breve{u}_{yy},$$

$$l_2\breve{u}=\frac{\partial\Delta\breve{u}}{\partial n}+(1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}(n_1n_2(\breve{u}_{yy}-\breve{u}_{xx})+(n_1^2-n_2^2)\breve{u}_{xy}),$$

$$n_1=-\cos(n,x),\ n_2=-\cos(n,y),\ \sigma\in(0;1).$$

В теории упругости правая часть уравнения $\breve{f}=\breve{P}/\breve{D},$ где $\breve{P}$ – давление, $\breve{D}=\breve{E}\breve{h}^3/(12(1-\sigma^2))$ – цилиндрическая жёсткость пластины, $\breve{h}$ – толщина пластины, $\breve{E}$ – модуль Юнга, σ – коэффициент Пуассона, Ω – ограниченная область на плоскости с кусочно-гладкой границей, n – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Можно сформулировать предыдущую краевую задачу как задачу представления линейного функционала в виде скалярного произведения

$$\breve{u}\in\breve{H}:[\breve{u},\breve{v}]=F(\breve{v})\ \forall\breve{v}\in\breve{H},\ F\in\breve{H}', \tag{2}$$

где пространство функций Соболева

$$\breve{H}=\breve{H}(\Omega)=\left\{\breve{v}\in W_2^2(\Omega):\breve{v}\Big|_{\Gamma_0\cup\Gamma_1}=0,\ \frac{\partial\breve{v}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_0\cup\Gamma_2}=0\right\},$$

скалярное произведение

$$[\breve{u},\breve{v}]=\Lambda(\breve{u},\breve{v})=\int_{\Omega}(\sigma\Delta\breve{u}\Delta\breve{v}+(1-\sigma)(\breve{u}_{xx}\breve{v}_{xx}+2\breve{u}_{xy}\breve{v}_{xy}+\breve{u}_{yy}\breve{v}_{yy}))d\Omega,$$

если $\breve{f}$ – заданная функция, то линейный функционал

$$F\left(\breve{v}\right)=(\breve{u},\breve{v})=\int_{\Omega}\breve{f}\breve{v}d\Omega.$$

– гармоническая система – смешанная краевая задача для неоднородного гармонического уравнения о вертикальном перемещении точек мембраны, расположенной горизонтально, под действием вертикального давления с однородными краевыми условиями закрепления и свободного края

$$u:-\Delta\breve{u}=\breve{f}\big|_{\Omega},\ \Omega\subset\mathbb{R}^2,\ \breve{u}\Big|_{\Gamma_1}=0,\ \frac{\partial\breve{u}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2}=0, \tag{3}$$

где

$$\partial\Omega=\bar{s},\ s=\Gamma_1\bigcup\Gamma_2,\ \Gamma_1\bigcap\Gamma_2=\varnothing.$$

В теории упругости правая часть уравнения $\breve{f} = \breve{P}/\breve{T}$, где $\breve{P}$ – давление, $\breve{T}$ – коэффициент натяжения мембраны, Ω – ограниченная область на плоскости с кусочно-гладкой границей, n – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Можно сформулировать предыдущую краевую задачу как задачу представления линейного функционала в виде скалярного произведения

$$\breve{u} \in \breve{H} : [\breve{u}, \breve{v}] = F(\breve{v}) \ \forall \breve{v} \in \breve{H},\ F \in \breve{H}', \tag{4}$$

где пространство функций Соболева

$$\breve{H} = \breve{H}(\Omega) = \left\{ \breve{v} \in W_2^1(\Omega) : \breve{v}\big|_{\Gamma_1} = 0 \right\},$$

скалярное произведение

$$[\breve{u}, \breve{v}] = \mathrm{A}(\breve{u}, \breve{v}) = \int_{\Omega} (\breve{u}_x \breve{v}_x + \breve{u}_y \breve{v}_y) d\Omega,$$

если $\breve{f}$ – заданная функция, то линейный функционал

$$F\left(\breve{v}\right) = (\breve{u}, \breve{v}) = \int_{\Omega} \breve{f}\breve{v} d\Omega.$$

– скалярная система – задача представления линейного функционала в виде скалярного произведения в пространстве Гильберта как обобщение смешанных краевых задач для неоднородных полигармонических уравнений с однородными краевыми условиями

$$\breve{u} \in \breve{H} : [\breve{u}, \breve{v}] = F(\breve{v}) \ \forall \breve{v} \in \breve{H},\ F \in \breve{H}', \tag{5}$$

где пространство функций Гильберта $\breve{H} = \breve{H}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область на плоскости с кусочно-гладкой границей, скалярное произведение $[\breve{u}, \breve{v}]$, линейный функционал $F\left(\breve{v}\right)$.

Степень разработанности темы. В диссертации приводится обзор разнообразных методов решения рассматриваемых задач, а в автореферате перечисляются лишь некоторые из них. При численном решении краевых задач для эллиптических уравнений часто применяют многосеточные методы, например, Г.И. Марчук, В.В. Шайдуров и др. При этом сохраняется важность эффективного численного решения этих задач на множестве используемых сеток. Есть статистические методы решения рассматриваемых задач, например, метод Монте-Карло. Такой подход разрабатывали Г.А. Михайлов, К.К. Сабельфельд и др. Метод фиктивных областей при продолжении эллиптической задачи второго порядка через границу при краевом условии Неймана с асимптотически оптимальными по количеству операций вычислительными затратами впервые предложил Г.П. Астраханцев. Краевую задачу Дирихле для уравнения Софи Жермен в ограниченной области сводят к решению задач Дирихле для уравнения Пуассона и решению интегрального уравнения уже на границе исходной области Р. Гловинский, О. Пиронно, П.Г. Сиарле. В методах численного решения эллиптических краевых задач в геометрически сложных областях с краевым условием Дирихле вычислительные затраты в лучшем случае логарифмически оптимальные. При этом можно использовать, что численные решения краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольных областях прямыми маршевыми методами являются асимптотически оптимальными по количеству операций.

В заключение перечислены авторы, работы, которых стали основной опорой для разработки асимптотически оптимального по количеству операций метода итерационных расширений для решения рассматриваемых проблемных задач. Была предложена, исследовалась и оптимизировалась методология фиктивных компонент в работах: Г.П. Астраханцева, И.Е. Капорина, Ю.А. Кузнецова, Г.И. Марчука, А.М. Мацокина, С.В. Непомнящих, Е.С. Николаева, С.Б. Сорокина и др. В работах по данной тематике использовались приемы понижения порядка, факторизации, упрощения геометрии области и попытки применения методов различных специальностей. Ученые реализовывали стремление к получению асимптотически оптимальных по количеству операций методов для решения рассматриваемых задач. Однако для решения краевой задачи Дирихле в геометрически сложных областях, только для эллиптических уравнений второго порядка А.М. Мацокин, С.В. Непомнящих разработали, асимптотически оптимальный по количеству операций метод фиктивного пространства. Этот метод теоретически был достаточно сложен, а его практическая реализация технически трудна, и он не применялся для решения, например, бигармонической проблемы. Это свидетельствует, что такие задачи при решении имеют определенные трудности, остаются проблемными, т.е. для их решения требуются новые подходы, новые знания и проведение их системного анализа с опорой на предыдущие результаты исследований.

Объектом исследования являются стационарные физические системы, описываемые проблемными краевыми задачами для уравнений Софи Жермен, Пуассона и задачей представления линейного функционала в виде скалярного произведения.

Предметом исследования являются итерационные методы для анализа бигармонических, гармонических и скалярных систем, определяемых проблемными краевыми задачами для уравнений Софи Жермен, Пуассона и задачей представления линейного функционала в виде скалярного произведения.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является решение фундаментальной научной проблемы – бигармонической проблемы в геометрически сложных областях для вычислений прогибов пластин с асимптотически оптимальным количеством операций в задачах, возникающих при строительстве гражданских и промышленных зданий, подводных лодок, кораблей, самолетов, ракет и других объектов. Для этого требуется разработать новое научное направление, в основе которого лежит метод итерационных расширений, асимптотически оптимальный по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором значений итерационного параметра при обработке информации для анализа бигармонических, гармонических и скалярных систем, описывающих стационарные физические системы.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи:**

1. Для анализа бигармонических систем разработать новые метод и алгоритм итерационных расширений, асимптотически оптимальные по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором значений итерационного параметра при обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности.

2. Для анализа гармонических систем разработать новые метод и алгоритм итерационных расширений, асимптотически оптимальные по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором значений итерационного параметра при обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности.

3. Для анализа скалярных систем разработать новые метод и алгоритм итерационных расширений, асимптотически оптимальные по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором значений итерационного параметра при обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности.

4. Для анализа бигармонических систем разработать специальное математическое и алгоритмическое обеспечение, реализующее метод итерационных расширений, асимптотически оптимальное по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором значений итерационного параметра при обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности. Получить графические представления решений модельных задач бигармонических систем.

5. Для анализа гармонических систем разработать специальное математическое и алгоритмическое обеспечение, реализующее метод итерационных расширений, асимптотически оптимальное по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором значений итерационного параметра при обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности. Получить графические представления решений модельных задач гармонических систем.

Научная новизна заключается в разработке нового метода итерационных расширений, асимптотически оптимального по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором значений итерационного параметра при обработке информации для анализа бигармонических, гармонических и скалярных систем. В рамках развития нового направления метод итерационных расширений предложен асимптотически оптимальный по вычислительным затратам метод решения бигармонической проблемы в геометрически сложных областях. Только при решении краевой задачи Дирихле в геометрически сложных областях для эллиптических уравнений второго порядка известен асимптотически оптимальный по количеству операций метод фиктивного пространства. Этот метод достаточно сложен, его практическая реализация технически сравнительно трудна, и он не получил дальнейшего развития.
К основным новым результатам относятся следующие результаты:

1. Разработаны новые метод и алгоритм итерационных расширений, асимптотически оптимальные по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором значений итерационного параметра при обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа бигармонических систем. В методе итерационных расширений используется введение параметра, имеющего в приложениях физический смысл жесткости пластины, а минимизация ошибки ведется в более сильной норме, чем энергетическая норма.
2. Разработаны новые метод и алгоритм итерационных расширений, асимптотически оптимальные по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором значений итерационного параметра при обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа гармонических систем. В методе итерационных расширений используется введение параметра, имеющего в приложениях физический смысл натяжения мембраны, а минимизация ошибки ведется в более сильной норме, чем энергетическая норма.
3. Разработаны новые метод и алгоритм итерационных расширений, асимптотически оптимальные по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором значений итерационного параметра при обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа скалярных систем как обобщения метода и алгоритма итерационных расширений для гармонических, бигармонических и других систем.
4. Разработано специальное математическое и алгоритмическое обеспечение, реализующее метод итерационных расширений, асимптотически оптимальное по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором значений итерационного параметра

при обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа бигармонических систем. Это обеспечение позволяет решать модельные задачи бигармонических систем с получением графических представлений решений.

5. Разработано специальное математическое и алгоритмическое обеспечение, реализующее метод итерационных расширений, асимптотически оптимальное по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором значений итерационного параметра при обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа гармонических систем. Это обеспечение позволяет решать модельные задачи гармонических систем с получением графических представлений решений.

Методология и методы исследования. В работе используются методы математической физики, вычислительной математики и функционального анализа. Разработка нового метода итерационных расширений основывается на методах фиктивных областей, компонент и методологии системного анализа.

Теоретическая значимость работы. Разработанный новый метод итерационных расширений развивает применение методологии системного анализа на примерах использования вложения рассматриваемых систем в продолженные и расширенные системы, междисциплинарных связей, аналогичности свойств систем, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации. Этот метод вносит вклад в развитие методов решения задач бигармонических, гармонических и скалярных систем, описывающих стационарные физические системы. А именно обобщение модифицированного метода фиктивных компонент в разработанном методе итерационных расширений создает систему анализа бигармонических, гармонических и скалярных систем, позволяющую в свою очередь находить асимптотически оптимально по количеству операций численные решения задач соответствующих систем с задаваемой точностью и при графических представлениях этих решений.

Практическая значимость работы. Разработанный новый метод итерационных расширений может использоваться для анализа задач бигармонических и гармонических систем, описывающих стационарные физические системы в природе и технике в таких областях как строительство гражданских и промышленных зданий, подводных лодок, кораблей, самолетов, ракет и т.д. Использование этого асимптотически оптимального по количеству операций метода предоставляет возможности экономии материальных ресурсов и средств, например, в строительстве, приборостроении, а также сокращения времени вычислений на ЭВМ. Метод реализован в программах для ЭВМ [16, 17, 18, 19, 20]. Это предоставляет возможности внедрения разработанного метода в системы компьютерной алгебры и автоматизированного проектирования. Следует отметить, что после нахождения решений проблемных задач разработанным методом уже без проблем находятся параметры рассматриваемых систем, являющиеся производными от полученных решений. Результаты работы могут быть использованы в процессе обучения в высших учебных заведениях на механико-математических и физико-технических специальностях и направлениях.

Основные положения, выносимые на защиту:

В рамках разработки методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации и искусственного интеллекта:

1. Новые метод и алгоритм итерационных расширений, асимптотически оптимальные по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором значений итерационного параметра при обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа бигармонических систем [1, 2, 5, 7, 10, 12, 13, 14].

2. Новые метод и алгоритм итерационных расширений, асимптотически оптимальные по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором значений итерационного параметра при обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа гармонических систем [1, 3, 6, 8, 9, 11, 15].

3. Новые метод и алгоритм итерационных расширений, асимптотически оптимальные по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором значений итерационного параметра при обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа скалярных систем [1, 2, 3, 4, 6, 7].

В рамках разработки специального математического и алгоритмического обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта:

4. Специальное математическое и алгоритмическое обеспечение, реализующее метод итерационных расширений, асимптотически оптимальное по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором значений итерационного параметра при обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа бигармонических систем [1, 2, 7, 10].

5. Специальное математическое и алгоритмическое обеспечение, реализующее метод итерационных расширений, асимптотически оптимальное по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором значений итерационного параметра при обработке

информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа гармонических систем [1, 3, 8, 9, 11].

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты работы были опубликованы, научно обоснованы, были приведены их математические доказательства. При вычислительных экспериментах подтверждились теоретические результаты, приведенные в работе, а именно нашла подтверждение асимптотическая оптимальность по количеству операций разработанных численных методов. Результаты работы докладывались на: Международной научно-технической конференции «Автоматизация» (г. Сочи, 06-12 сентября 2020 года); XXXIII – «Международной научной конференции математические методы в технике и технологиях ММТТ-33» (г. Казань, 14-18 сентября 2020 года); Международной конференции «Кибер-физические системы: проектирование и моделирование» «Cyber-physical systems design and modelling» (г. Казань, 14-18 сентября 2020 года); «Фундаментальные проблемы управления производственными процессами в условиях перехода к индустрии 4.0» (г. Сочи, 06-12 сентября 2020 года); 7-й Международной школе-семинаре «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» «Nonlinear analysis and extremal problems» (г. Иркутск, 15-22 июля 2022 года); Международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и образования» в соавторстве (г. Ош, Кыргызстан, 12-13 мая 2023 года).

Предварительные результаты работы неоднократно докладывались на научном семинаре «Уравнения соболевского типа» профессора Г.А. Свиридюка (г. Челябинск), на объединенном научном семинаре профессора А.Г. Кушнера в ИПУ РАН (г. Москва), научном семинаре профессора В.И. Ряжских в ВГТУ (г. Воронеж) и научном семинаре профессора С.И. Кадченко в МГТУ (г. Магнитогорск).

Публикации автора по теме диссертации. По теме диссертации издано 43 работы, из них 9 свидетельств государственной регистрации программ для ЭВМ, из них 8 программ разработанных в соавторстве, 12 работ изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 5 работ в изданиях, индексируемых Scopus, из них две работы в соавторстве.

Личный вклад соискателя. Все исследования, излагаемые в диссертационной работе, проведены лично соискателем. Из работ, выполненных в соавторстве, в диссертацию вошли только результаты, полученные автором лично.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, списка обозначений и десяти приложений. Объём диссертации с приложениями составляет 296 страниц. Список литературы содержит 129 наименований.

Краткое содержание диссертации

Введение диссертации включает в себя актуальность темы, задачи, степень научной разработки темы, объект анализа, предмет анализа, цель и задачи исследования, методы исследования, научную новизну, теоретическую значимость работы, практическую значимость работы, основные положения, выносимые на защиту, степень достоверности и апробации результатов.

Первая глава посвящена анализу бигармонической системы. В п. 1.1 рассматривается система в вариационном виде

$$\breve{u}_\omega \in \breve{H}_\omega : \Lambda_\omega(\breve{u}_\omega,\breve{v}_\omega) = F_\omega(\breve{v}_\omega)\ \forall \breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega,\ F_\omega \in \breve{H}'_\omega,\ \omega \in \{1, \mathrm{II}\},\ \Omega_\omega \subset \mathbb{R}^2, \qquad (6)$$

где правая часть задачи, если $\breve{f}_1 \in L_2(\Omega_1) -$ заданная функция,

$$F_\omega(\breve{v}_\omega) = \int\limits_{\Omega_\omega} \breve{f}_\omega \breve{v}_\omega d\Omega_\omega\ \ \forall \breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega,\ \breve{f}_{\mathrm{II}} = 0,$$

пространство функций Соболева

$$\breve{H}_\omega = \breve{H}_\omega(\Omega_\omega) = \left\{ \breve{v}_\omega \in W_2^2(\Omega_\omega) : \breve{v}_\omega\big|_{\Gamma_{\omega,0}\cup\Gamma_{\omega,1}} = 0,\ \frac{\partial \breve{v}_\omega}{\partial n_\omega}\Big|_{\Gamma_{\omega,0}\cup\Gamma_{\omega,2}} = 0 \right\},$$

на плоской ограниченной области Ω_ω с границей

$$\partial\Omega_\omega = \overline{s}_\omega,\ s_\omega = \Gamma_{\omega,0} \cup \Gamma_{\omega,1} \cup \Gamma_{\omega,2} \cup \Gamma_{\omega,3},$$
$$\Gamma_{\omega,i} \cap \Gamma_{\omega,j} = \varnothing, \text{ если } i \neq j,\ i, j = 0,1,2,3,$$

n_ω – внешняя нормаль к $\partial\Omega_\omega$, скалярное произведение

$$\Lambda_\omega(\breve{u}_\omega,\breve{v}_\omega) = \int\limits_{\Omega_\omega} (\sigma_\omega \Delta\breve{u}_\omega \Delta\breve{v}_\omega + (1-\sigma_\omega)(\breve{u}_{\omega xx}\breve{v}_{\omega xx} + 2\breve{u}_{\omega xy}\breve{v}_{\omega xy} + \breve{u}_{\omega yy}\breve{v}_{\omega yy}) + a_\omega \breve{u}_\omega \breve{v}_\omega) d\Omega_\omega,$$

коэффициент жесткости упругого основания $a_\omega \in [0;+\infty)$, коффициент Пуассона $\sigma_\omega \in (0;1)$. При $\omega = 1,\ a_1 = 0,\ \Gamma_{1,0} \neq \varnothing$ рассматривается решаемая задача бигармонической системы. При $\omega = \mathrm{II},\ a_{\mathrm{II}} \geq 0$ рассматривается фиктивная задача бигармонической системы.

В п. 1.2 приводится продолженная бигармоническая система

$$\breve{u} \in \breve{V} :\ \Lambda_1(\breve{u}, I_1\breve{v}) + \Lambda_{\mathrm{II}}(\breve{u},\breve{v}) = F_1(I_1\breve{v})\ \forall \breve{v} \in \breve{V}, \qquad (7)$$

где расширенное пространство решений рассматриваемой здесь продолженной задачи пространство Соболева

$$\breve{V} = \breve{V}(\Pi) = \left\{ \breve{v} \in W_2^2(\Pi) : \breve{v}\big|_{\Gamma_0\cup\Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial \breve{v}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_0\cup\Gamma_2} = 0 \right\},$$

а области $\Omega_1, \Omega_{\mathrm{II}}$ таковы, что $\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_{\mathrm{II}} = \overline{\Pi},\ \Omega_1 \cap \Omega_{\mathrm{II}} = \varnothing,$ граница области Π также состоит из замыкания объединений открытых непересекающихся частей

$$\partial\Pi = \overline{s},\ s = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3,\ \Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing,\ i \neq j,\ i, j = 0,1,2,3,$$

а не пустое пересечение границы первой области и границы второй области будет замыканием пересечения соответствующих частей границ этих областей

$$\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_{II} = \bar{S},\ S = \Gamma_{1,0} \cap \Gamma_{II,3} \ne \varnothing,$$

n – внешняя нормаль к $\partial\Pi$.

Расширенное пространство решений содержит подпространство решений продолженной задачи

$$\breve{V}_1 = \breve{V}_1(\Pi) = \left\{ \breve{v}_1 \in \breve{V} : \breve{v}_1\big|_{\Pi\setminus\Omega_1} = 0 \right\}.$$

В продолженной задаче используется оператор проектирования расширенного пространства на подпространство решений продолженной задачи

$$I_1 : \breve{V} \mapsto \breve{V}_1,\ \breve{V}_1 = \operatorname{im} I_1,\ I_1 = I_1^2.$$

В п. 1.3 приводится анализ продолженной системы модифицированным методом фиктивных компонент.

В п. 1.4 продолженная бигармоническая система рассматривается на конечномерном подпространстве пространства Соболева. Используются при аппроксимации параболические конечные элементы. Анализируется дискретизация продолженной бигармонической системы, когда

$$\Pi = (0;b_1)\times(0;b_2), \Gamma_0 = \varnothing,\ \Gamma_1 = \{b_1\}\times(0;b_2)\cup(0;b_1)\times\{b_2\},$$

$$\Gamma_2 = \{0\}\times(0;b_2)\cup(0;b_1)\times\{0\},\ \Gamma_3 = \varnothing,\ b_1, b_2 \in (0;+\infty).$$

В прямоугольной области определяется сетка с узлами

$$(x_i; y_j) = \left((i-1{,}5)h_1; (j-1{,}5)h_2\right),$$

$$h_1 = b_1/(m-1{,}5),\ h_2 = b_2/(n-1{,}5),\ i = 1,2,\dots,m,\ j = 1,2,\dots,n,\ m-2, n-2 \in \mathbb{N}.$$

Вводятся сеточные функции на множестве узлов введенной сетки

$$v_{i,j} = v(x_i; y_j) \in \mathbb{R},\ i = 1,2,\dots,m,\ j = 1,2,\dots,n,\ m-2, n-2 \in \mathbb{N}.$$

Применяется восполнение сеточных функций, с использованием параболических базисных функций

$$\Phi^{i,j}(x;y) = \Psi^{1,i}(x)\Psi^{2,j}(y),\ i = 2,\dots,m-1,\ j = 2,\dots,n-1,\ m-2, n-2 \in \mathbb{N},$$

$$\Psi^{1,i}(x) = [2/i]\Psi(x/h_1 - i + 4) + \Psi(x/h_1 - i + 3) - [(i+1)/m]\Psi(x/h_1 - i + 1),$$

$$\Psi^{2,j}(y) = [2/j]\Psi(y/h_2 - j + 4) + \Psi(y/h_2 - j + 3) + [(j+1)/n]\Psi(y/h_2 - j + 1),$$

$$\Psi(z) = \begin{cases} 0{,}5z^2, & z \in [0;1], \\ -z^2 + 3z - 1{,}5, & z \in [1;2], \\ 0{,}5z^2 - 3z - 4{,}5, & z \in [2;3], \\ 0, & z \notin (0;3). \end{cases}$$

Считается, что базисные функции вне прямоугольной области равны нулю

$$\Phi^{i,j}(x;y) = 0,\ (x;y) \notin \Pi,\ i = 2,\dots,m-1,\ j = 2,\dots,n-1,\ m-2, n-2 \in \mathbb{N}.$$

Используются линейные комбинации из базисных функций, которые задают конечномерное подпространство в расширенном пространстве решений

$$\tilde{V} = \left\{ \tilde{v} = \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{n-1} v_{i,j} \Phi^{i,j}(x;y) \right\} \subset \breve{V}.$$

В п. 1.5 приводится анализ продолженной системы модифицированным методом фиктивных компонент на конечномерном подпространстве.

В п. 1.6 продолженная система рассматривается на пространстве Евклида. Задача продолженной системы после аппроксимации рассматривается в матричном виде как система линейных алгебраических уравнений. При аппроксимации задачи для продолженной системы с помощью конечномерного подпространства, получается система уравнений

$$\bar{u} \in \mathbb{R}^N : B\bar{u} = \bar{f}, \ \bar{f} \in \mathbb{R}^N. \tag{8}$$

Считается, что оператор проектирования на пространство решений продолженной задачи обнуляет коэффициенты у базисных функций, носители которых не содержатся полностью в первой области. Получается задача продолженной системы в матричном виде, если определить продолженную матрицу и продолженную правую часть системы

$$\left\langle B\bar{u}, \bar{v} \right\rangle = \Lambda_1(\tilde{u}, I_1\tilde{v}) + \Lambda_{\mathrm{II}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \ \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}, \left\langle \bar{f}, \bar{v} \right\rangle = F_1(I_1\tilde{v}) \ \forall \tilde{v} \in \tilde{V},$$

$$\left\langle \bar{f}, \bar{v} \right\rangle = (\bar{f}, \bar{v}) h_1 h_2 = \bar{f}\,\bar{v} h_1 h_2, \ \bar{v} = (v_1, v_2, ..., v_N)' \in \mathbb{R}^N, N = (m-2)(n-2).$$

При этом нумеруются первыми базисные функции, носители которых полностью лежат в первой области. Затем нумеруются базисные функции, носители которых пересекают границу первой области и второй области вместе. Заканчивается нумерация на базисных функциях носители, которых полностью лежат во второй области. При этой нумерации возникающие векторы имеют данный вид

$$\bar{v} = (\bar{v}_1', \bar{v}_2', \bar{v}_3')', \bar{u} = (\bar{u}_1', \bar{0}', \bar{0}')', \ \bar{f} = (\bar{f}_1', \bar{0}', \bar{0}')'.$$

Матрица имеет такую известную структуру

$$B = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix}.$$

Задаются матрицы, порождаемые скалярными произведениями

$$\left\langle \Lambda_{\mathrm{I}}\bar{u}, \bar{v} \right\rangle = \Lambda_1(\tilde{u}, \tilde{v}), \left\langle \Lambda_{\mathrm{II}}\bar{u}, \bar{v} \right\rangle = \Lambda_{\mathrm{II}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \ \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Эти матрицы имеют следующую структуру

$$\Lambda_{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Lambda_{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix}.$$

Вводится подпространство векторов

$$\bar{V}_1 = \left\{ \bar{v} = (\bar{v}_1{}', \bar{v}_2{}', \bar{v}_3{}')' \in \mathbb{R}^N : \bar{v}_2 = \bar{0},\, \bar{v}_3 = \bar{0} \right\}.$$

Дополнительно определяется подпространство векторов

$$\bar{V}_2 = \left\{ \bar{v} = (\bar{v}_1{}', \bar{v}_2{}', \bar{v}_3{}')' \in \mathbb{R}^N : \Lambda_{11}\bar{v}_1 + \Lambda_{12}\bar{v}_2 = \bar{0},\, \Lambda_{32}\bar{v}_2 + \Lambda_{33}\bar{v}_3 = \bar{0} \right\}.$$

В п. 1.7 приводится анализ продолженной системы модифицированным методом фиктивных компонент на пространстве Евклида.

В п. 1.8 производится асимптотически оптимальный анализ продолженной системы методом итерационных расширений на пространстве Евклида. Для решения задач (8) используется новый метод итерационных расширений. Определяется расширенная матрица в виде суммы первой матрицы и второй матрицы, умноженной на положительный параметр цилиндрической жесткости пластины на второй области

$$C = \Lambda_{\mathrm{I}} + \gamma \Lambda_{\mathrm{II}},$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{02} & \Lambda_{23} \\ 0 & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix},\ \gamma \in (0; +\infty).$$

Предполагается, что выполняются положения о продолжении

$$\exists \gamma_1 \in (0;+\infty),\, \gamma_2 \in [\gamma_1;+\infty) : \gamma_1^2 \left\langle C\bar{v}_2, C\bar{v}_2 \right\rangle \le \left\langle \Lambda_{\mathrm{II}}\bar{v}_2, \Lambda_{\mathrm{II}}\bar{v}_2 \right\rangle \le \gamma_2^2 \left\langle C\bar{v}_2, C\bar{v}_2 \right\rangle\ \forall \bar{v}_2 \in \bar{V}_2,$$

$$\exists \alpha \in (0;+\infty) : \left\langle \Lambda_{\mathrm{I}}\bar{v}_2, \Lambda_{\mathrm{I}}\bar{v}_2 \right\rangle \le \alpha^2 \left\langle \Lambda_{\mathrm{II}}\bar{v}_2, \Lambda_{\mathrm{II}}\bar{v}_2 \right\rangle\ \forall \bar{v}_2 \in \bar{V}_2.$$

Метод итерационных расширений является обобщением метода фиктивных компонент, когда используются дополнительные параметры при выборе расширенной матрицы, а итерационные параметры выбираются на основе метода минимальных невязок

$$\bar{u}^k \in \mathbb{R}^N : C(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(B\bar{u}^{k-1} - \bar{f}),\ k \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

$$\forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_1,\ \gamma > \alpha,\ \tau_0 = 1,\ \tau_{k-1} = \left\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle \Big/ \left\langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

где для вычисления итерационных параметров последовательно вычисляются невязки, поправки, эквивалентные невязки

$$\bar{r}^{k-1} = B\bar{u}^{k-1} - \bar{f},\ \bar{w}^{k-1} = C^{-1}\bar{r}^{k-1},\ \bar{\eta}^{k-1} = B\bar{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

Определяется норма, порождаемая расширенной матрицей

$$\|\bar{v}\|_{C^2} = \sqrt{\left\langle C^2\bar{v}, \bar{v} \right\rangle}\ \ \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^N.$$

Теорема 1. (1.8.1) *Для метода итерационных расширений* (9) *при анализе бигармонической системы имеет место оценка сходимости*

$$\left\| \bar{u}^k - \bar{u} \right\|_{C^2} \le \varepsilon \left\| \bar{u}^0 - \bar{u} \right\|_{C^2},\ \varepsilon = 2(\gamma_2/\gamma_1)(\alpha/\gamma)^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

В п. 1.9 приводится анализ продолженной системы методом итерационных расширений в пространстве Соболева.

В п. 1.10 приводится анализ продолженной системы методом итерационных расширений на конечномерном подпространстве пространства Соболева.

В п. 1.11 выписывается алгоритм, реализующий метод итерационных расширений для решения задачи продолженной системы на пространстве Евклида. При выборе итерационных параметров применяется метод минимальных невязок.

I. Выбирается начальное приближение и итерационный параметр

$$\forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_1,\ \tau_0 = 1.$$

II. Находится невязка

$$\bar{r}^{k-1} = B\bar{u}^{k-1} - \bar{f},\ k \in \mathbb{N}.$$

III. Вычисляется норма абсолютной ошибки в квадрате

$$\mathrm{E}_{k-1} = \left\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{r}^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N}.$$

IV. Ищется поправка

$$\bar{w}^{k-1} : C\bar{w}^{k-1} = \bar{r}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

V. Находится эквивалентная невязка

$$\bar{\eta}^{k-1} = B\bar{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

VI. Находится оптимальное значение итерационного параметра

$$\tau_{k-1} = \left\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle \Big/ \left\langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

VII. Находится очередное приближение

$$\bar{u}^k = \bar{u}^{k-1} - \tau_{k-1}\bar{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

VIII. Проверяется выполнение критерия остановки итераций по заданной оценке относительной ошибки

$$\mathrm{E}_{k-1} \le \mathrm{E}^2\mathrm{E}_0,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ \mathrm{E} \in (0;1).$$

В п. 1.12 рассматриваются методы итерационных факторизаций для решения расширенной задачи бигармонической системы на прямоугольной области.

В п. 1.13 рассматривается продолженная бигармоническая система, когда

$$\Omega_{\mathrm{I}} = (1;2)\times(1;2),\ \Omega_{\mathrm{II}} = (0;b)\times(0;b)\setminus[1;2]\times[1;2], \Pi = (0;b)\times(0;b),\ 3 < b \le 19/6.$$

Первая область по форме является открытым единичным квадратом, а вторая область является открытым квадратом с выколотым замкнутым квадратом, а границы областей имеют следующие части

$$\Gamma_{\mathrm{I},0} = \{1,\,2\}\times(1;2)\cup(1;2)\times\{1,\,2\},$$

$$\Gamma_{\mathrm{II},1} = \{b\}\times(0;b)\cup(0;b)\times\{b\},\ \Gamma_{\mathrm{II},2} = \{0\}\times(0;b)\cup(0;b)\times\{0\},$$

$$\Gamma_{\mathrm{II},3} = \{1,\,2\}\times(1;2)\cup(1;2)\times\{1,\,2\},$$

$$\Gamma_1 = \{b\}\times(0;b)\cup(0;b)\times\{b\},\ \Gamma_2 = \{0\}\times(0;b)\cup(0;b)\times\{0\}.$$

В п. 1.14 приводится продолженнная бигармоническая система на конечномерном подпространстве пространства Соболева на квадрате Π.

В этих квадратной области и опоясывающей полосе определяется сетка с узлами

$$(x_i; y_j) = \big((i-1{,}5)h; (j-1{,}5)h\big),\ h = 3/(n-2),$$
$$n = 3m+2,\ m \in \mathbb{N},\ m \geq 3,\ b = 3 + 0{,}5h,\ i = 1, 2..., n,\ j = 1, 2..., n.$$

В п. 1.15 предлагается алгоритм, реализующий метод итерационных расширений для решения задачи продолженной бигармонической системы на квадрате после ее аппроксимации по методу конечных элементов.

В п. 1.16 предлагается алгоритм, использующий метод итерационной факторизации при решении задачи продолженной бигармонической системы на квадрате после ее аппроксимации по методу конечных элементов.

В п. 1.17 приводится пример анализа стационарной физической системы для пластины методом итерационных расширений. Например, для стали при коффициенте Пуассона $\sigma_1 = 0{,}28,$ модуле Юнга $\breve{E}_1 = 227000,$ толщине пластины $\breve{h} = 0{,}25,$ цилиндрической жескости пластины

$$\breve{D}_1 = 320{,}71714048 \text{ и давлении } \breve{P}_1 = 164207{,}175925(3(x-1)^2(x-2)^2 +$$
$$+(6x^2 - 18x + 13)(6y^2 - 18y + 13) + 3(y-1)^2(y-2)^2)$$

решением исходной задачи будет

$$\breve{u}_1 = 64(x-1)^2(x-2)^2(y-1)^2(y-2)^2.$$

При решении задачи на ЭВМ подтверждается экспериментально асимптотическая оптимальность метода итерационных расширений по количеству операций.

Рассматривается численное решение приведенной задачи, когда $n = 161$. Выбирается нулевое начальное приближение, тогда итерационный процесс метода итерационных расширений останавливается на пятой итерации, если в критерии его остановки задана оценка $\mathrm{E} = 0{,}001$. Дополнительно отмечается, что на последней итерации выполняется неравенство характеризуещее точность численного решения исходной задачи в норме максимум модуля

$$\max\left|u_{i,j}^5 - \breve{u}_{i,j}\right| \Big/ \max\left|\breve{u}_{i,j}\right| \leq 0{,}005.$$

Графики последнего приближения и точного решения почти совпадают, если в критерии остановки алгоритма реализующего метод итерационных расширений заранее задается оценка относительной ошибки в более сильной норме, чем энергетическая норма расширенной задачи $\mathrm{E} = 0{,}001$.

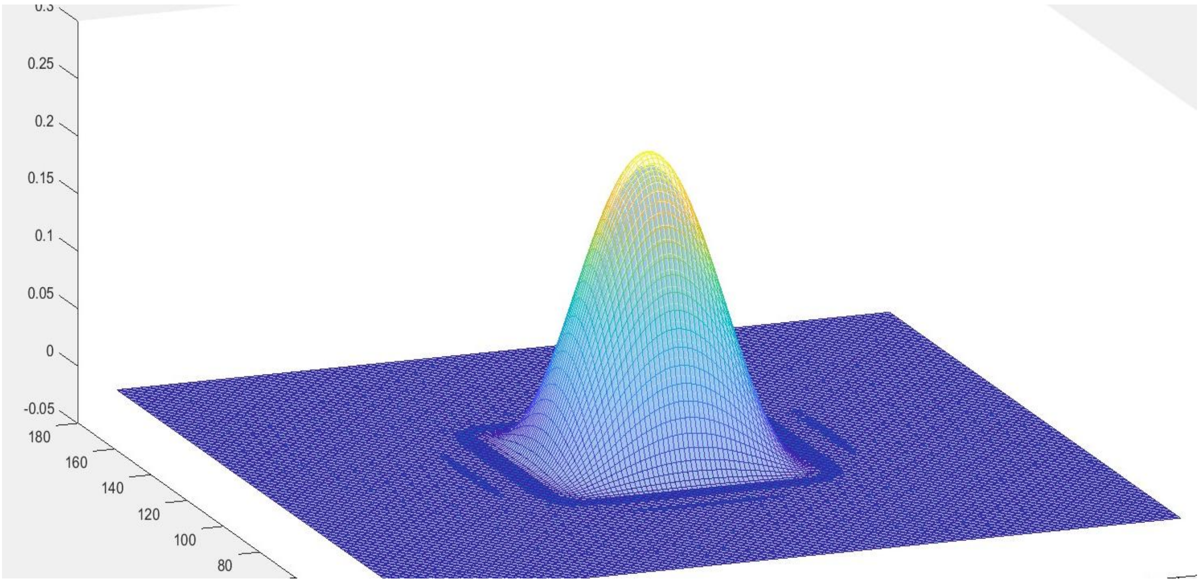

Рис. 2. Графики точного решения и итерационного решения

Для решения приведенной задачи использовались методы итерационных расширений, итерационных факторизаций на квадратной области. Описание алгоритмической реализации этих методов приведено соответственно в приложениях 1 и 2.

Вторая глава посвящена анализу гармонической системы, имеющей аналогии с бигармонической системой. В п. 2.1 рассматривается система в вариационном виде

$$\breve{u}_\omega \in \breve{H}_\omega : \mathrm{A}_\omega(\breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega) = F_\omega(\breve{v}_\omega)\ \forall \breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega,\ F_\omega \in \breve{H}'_\omega,\ \omega \in \{1, \mathrm{II}\},\ \Omega_\omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (10)$$

где правая часть задачи, если $\breve{f}_1 \in L_2(\Omega_1) -$ заданная функция,

$$F_\omega(\breve{v}_\omega) = \int\limits_{\Omega_\omega} \breve{f}_\omega \breve{v}_\omega d\Omega_\omega \ \ \forall \breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega,\ \breve{f}_{\mathrm{II}} = 0,$$

пространство функций Соболева

$$\breve{H}_\omega = \breve{H}_\omega(\Omega_\omega) = \left\{ \breve{v}_\omega \in W_2^1(\Omega_\omega) : \breve{v}_\omega\big|_{\Gamma_{\omega,1}} = 0 \right\}$$

на плоской ограниченной области Ω_ω с границей

$$\partial\Omega_\omega = \overline{s}_\omega,\ s_\omega = \Gamma_{\omega,1} \bigcup \Gamma_{\omega,2},\ \ \Gamma_{\omega,i} \bigcap \Gamma_{\omega,j} = \varnothing, \text{ если } i \neq j,\ i, j = 1, 2,$$

скалярное произведение

$$\mathrm{A}_\omega(\breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega) = \int\limits_{\Omega_\omega} (\breve{u}_{\omega x} \breve{v}_{\omega x} + \breve{u}_{\omega y} \breve{v}_{\omega y} + \kappa_\omega \breve{u}_\omega \breve{v}_\omega) d\Omega_\omega,$$

коэффициент жесткости упругого основания $\kappa_\omega \in [0; +\infty)$. При $\omega = 1,\ \kappa_1 = 0,\ \Gamma_{1,1} \neq \varnothing$ рассматривается решаемая задача гармонической системы. При $\omega = \mathrm{II},\ \kappa_{\mathrm{II}} \geq 0$ рассматривается фиктивная задача гармонической системы.

В п. 2.2 приводится продолженная гармоническая система

$$\breve{u} \in \breve{V} :\ \mathrm{A}_1(\breve{u}, I_1\breve{v}) + \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\breve{u}, \breve{v}) = F_1(I_1\breve{v})\ \forall \breve{v} \in \breve{V}, \quad (11)$$

где расширенное пространство решений рассматриваемой здесь продолженной задачи пространство Соболева

$$\breve{V} = \breve{V}(\Pi) = \left\{ \breve{v} \in W_2^1(\Pi) : \breve{v}\big|_{\Gamma_1} = 0 \right\},$$

а области $\Omega_1, \Omega_{\text{II}}$ таковы, что $\bar{\Omega}_1 \bigcup \bar{\Omega}_{\text{II}} = \bar{\Pi}, \Omega_1 \bigcap \Omega_{\text{II}} = \varnothing,$ граница области Π также состоит из замыкания объединений открытых непересекающихся частей

$$\partial\Pi = \bar{s},\ s = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2,\ \Gamma_i \bigcap \Gamma_j = \varnothing,\ i \neq j,\ i, j = 1,2,$$

а не пустое пересечение границы первой области и границы второй области будет замыканием пересечения соответствующих частей границ этих областей

$$\partial\Omega_1 \bigcap \partial\Omega_{\text{II}} = \bar{S},\ S = \Gamma_{1,1} \bigcap \Gamma_{\text{II},2} \neq \varnothing.$$

Расширенное пространство решений содержит подпространство решений продолженной задачи

$$\breve{V}_1 = \breve{V}_1(\Pi) = \left\{ \breve{v}_1 \in \breve{V} : \breve{v}_1\big|_{\Pi \setminus \Omega_1} = 0 \right\}.$$

В продолженной задаче используется оператор проектирования расширенного пространства на подпространство решений продолженной задачи

$$I_1 : \breve{V} \mapsto \breve{V}_1,\ \breve{V}_1 = \operatorname{im} I_1,\ I_1 = I_1^2.$$

В п. 2.3 приводится анализ продолженных систем модифицированным методом фиктивных компонент.

В п 2.4 продолженная гармоническая система рассматривается на конечномерном подпространстве пространства Соболева. Анализируется дискретизация продолженной гармонической системы, когда

$$\Pi = (0;b_1) \times (0;b_2),\ \Gamma_1 = \left\{b_1\right\} \times (0;b_2) \bigcup (0;b_1) \times \left\{b_2\right\},$$
$$\Gamma_2 = \left\{0\right\} \times (0;b_2) \bigcup (0;b_1) \times \left\{0\right\},\ b_1, b_2 \in (0;+\infty).$$

В прямоугольной области определяется сетка с узлами

$$(x_i; y_j) = \left((i-1{,}5)h_1; (j-1{,}5)h_2\right),$$
$$h_1 = b_1/(m-1{,}5),\ h_2 = b_2/(n-1{,}5),\ i = 1,2...,m,\ j = 1,2...,n,\ m-2, n-2 \in \mathbb{N}.$$

Вводятся сеточные функции на множестве узлов введенной сетки

$$v_{i,j} = v(x_i; y_j) \in \mathbb{R},\ i = 1,2...,m,\ j = 1,2...,n,\ m-2, n-2 \in \mathbb{N}.$$

Применяется восполнение сеточных функций, с использованием линейных базисных функций

$$\Phi^{i,j}(x;y) = \Psi^{1,i}(x)\Psi^{2,j}(y),\ i = 2...,m-1,\ j = 2...,n-1,\ m-2, n-2 \in \mathbb{N},$$
$$\Psi^{1,i}(x) = [2/i]\Psi(x/h_1 - i + 3{,}5) + \Psi(x/h_1 - i + 2{,}5),$$
$$\Psi^{2,j}(y) = [2/j]\Psi(y/h_2 - j + 3{,}5) + \Psi(y/h_2 - j + 2{,}5),$$

$$\Psi(z)=\begin{cases} z, & z\in[0;1],\\ 2-z, & z\in[1;2],\\ 0, & z\notin(0;2).\end{cases}$$

Считается, что базисные функции вне прямоугольной области равны нулю

$$\Phi^{i,j}(x;y)=0,\ (x;y)\notin\Pi,\ i=2...,m-1,\ j=2...,n-1,\ m-2,n-2\in\mathbb{N}.$$

Используются линейные комбинации из базисных функций, которые задают конечномерное подпространство в расширенном пространстве решений

$$\tilde{V}=\left\{\tilde{v}=\sum_{i=2}^{m-1}\sum_{j=2}^{n-1}v_{i,j}\Phi^{i,j}(x;y)\right\}\subset\breve{V}.$$

В п. 2.5 приводится анализ продолженной системы модифицированным методом фиктивных компонент на конечномерном подпространстве.

В п. 2.6 продолженная система рассматривается на пространстве Евклида. Задача продолженной системы после аппроксимации рассматривается в матричном виде как системы линейных алгебраических уравнений. При аппроксимации задачи для продолженной системы с помощью конечномерного подпространства, получается система уравнений

$$\bar{u}\in\mathbb{R}^N:\ B\bar{u}=\bar{f},\ \bar{f}\in\mathbb{R}^N. \tag{12}$$

Считается, что оператор проектирования на пространство решений продолженной задачи обнуляет коэффициенты у базисных функций, носители которых не содержатся полностью в первой области. Получается задача продолженной системы в матричном виде, если определить продолженную матрицу и продолженную правую часть системы

$$\left\langle B\bar{u},\bar{v}\right\rangle=\mathrm{A}_1(\tilde{u},I_1\tilde{v})+\mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\tilde{u},\tilde{v})\forall\tilde{u},\tilde{v}\in\tilde{V},\ \left\langle\bar{f},\bar{v}\right\rangle=F_1(I_1\tilde{v})\ \forall\tilde{v}\in\tilde{V},$$

$$\left\langle\bar{f},\bar{v}\right\rangle=(\bar{f},\bar{v})h_1h_2=\bar{f}\,\bar{v}h_1h_2,\ \bar{v}=(v_1,v_2,...,v_N)'\in\mathbb{R}^N,N=(m-2)(n-2).$$

При этом нумеруются первыми базисные функции, носители которых полностью лежат в первой области. Затем нумеруются базисные функции, носители которых пересекают границу первой области и второй области вместе. Заканчивается нумерация на базисных функциях, носители которых полностью лежат во второй области. При этой нумерации возникающие векторы имеют данный вид

$$\bar{v}=(\bar{v}_1',\bar{v}_2',\bar{v}_3')',\ \bar{u}=(\bar{u}_1',\bar{0}',\bar{0}')',\ \bar{f}=(\bar{f}_1',\bar{0}',\bar{0}')'.$$

Матрица имеет такую известную структуру

$$B=\begin{bmatrix}\mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0\\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23}\\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33}\end{bmatrix}.$$

Задаются матрицы, порождаемые скалярными произведениями

$$\left\langle \mathrm{A_I}\bar{u},\bar{v}\right\rangle = \mathrm{A_1}(\tilde{u},\tilde{v}),\ \left\langle \mathrm{A_{II}}\bar{u},\bar{v}\right\rangle = \mathrm{A_{II}}(\tilde{u},\tilde{v})\,\forall\tilde{u},\tilde{v}\in\tilde{V}.$$

Эти матрицы имеют следующую структуру

$$\mathrm{A_I} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathrm{A_{II}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix}.$$

Вводится подпространство векторов

$$\bar{V}_1 = \left\{\bar{v} = (\bar{v}_1{}', \bar{v}_2{}', \bar{v}_3{}')' \in \mathbb{R}^N : \bar{v}_2 = \bar{0},\ \bar{v}_3 = \bar{0}\right\}.$$

Дополнительно определяется подпространство векторов

$$\bar{V}_2 = \left\{\bar{v} = (\bar{v}_1{}', \bar{v}_2{}', \bar{v}_3{}')' \in \mathbb{R}^N : \mathrm{A}_{11}\bar{v}_1 + \mathrm{A}_{12}\bar{v}_2 = \bar{0},\ \mathrm{A}_{32}\bar{v}_2 + \mathrm{A}_{33}\bar{v}_3 = \bar{0}\right\}.$$

В п. 2.7 приводится анализ продолженной системы модифицированным методом фиктивных компонент на пространстве Евклида.

В п. 2.8 производится асимптотически оптимальный анализ продолженной системы методом итерационных расширений на пространстве Евклида. Для решения задачи (12) используется новый метод итерационных расширений. Определяется расширенная матрица в виде суммы первой матрицы и второй матрицы, умноженной на положительный параметр коэффициента натяжения мембраны на второй области

$$C = \mathrm{A_I} + \gamma\mathrm{A_{II}},$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix},\ \gamma \in (0;+\infty).$$

Предполагается, что выполняются положения о продолжении

$$\exists\gamma_1 \in (0;+\infty),\ \gamma_2 \in [\gamma_1;+\infty): \gamma_1^2\left\langle C\bar{v}_2, C\bar{v}_2\right\rangle \le \left\langle \mathrm{A_{II}}\bar{v}_2, \mathrm{A_{II}}\bar{v}_2\right\rangle \le \gamma_2^2\left\langle C\bar{v}_2, C\bar{v}_2\right\rangle\ \forall\bar{v}_2 \in \bar{V}_2,$$

$$\exists\alpha \in (0;+\infty): \left\langle \mathrm{A_I}\bar{v}_2, \mathrm{A_I}\bar{v}_2\right\rangle \le \alpha^2\left\langle \mathrm{A_{II}}\bar{v}_2, \mathrm{A_{II}}\bar{v}_2\right\rangle\ \forall\bar{v}_2 \in \bar{V}_2.$$

Метод итерационных расширений является обобщением метода фиктивных компонент, когда используются дополнительные параметры при выборе расширенных матриц, а итерационные параметры выбираются на основе метода минимальных невязок

$$\bar{u}^k \in \mathbb{R}^N : C(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(B\bar{u}^{k-1} - \bar{f}),\ k \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

$$\forall\bar{u}^0 \in \bar{V}_1,\ \gamma > \alpha,\ \tau_0 = 1,\ \tau_{k-1} = \left\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1}\right\rangle \Big/ \left\langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1}\right\rangle,\ k \in \mathbb{N}\setminus\{1\},$$

где для вычисления итерационных параметров последовательно вычисляются невязки, поправки, эквивалентные невязки

$$\bar{r}^{k-1} = B\bar{u}^{k-1} - \bar{f},\ \bar{w}^{k-1} = C^{-1}\bar{r}^{k-1},\ \bar{\eta}^{k-1} = B\bar{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

Определяется норма, порождаемая расширенной матрицей

$$\|\overline{v}\|_{C^2} = \sqrt{\langle C^2\overline{v}, \overline{v}\rangle} \ \ \forall \overline{v} \in \mathbb{R}^N.$$

Теорема 2. (2.8.1) *Для метода итерационных расширений* (13) *при анализе гармонической системы имеет место оценка сходимости*

$$\left\|\overline{u}^k - \overline{u}\right\|_{C^2} \le \varepsilon \left\|\overline{u}^0 - \overline{u}\right\|_{C^2},\ \varepsilon = 2(\gamma_2/\gamma_1)(\alpha/\gamma)^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

В п. 2.9 приводится анализ продолженной системы методом итерационных расширений в пространствах Соболева.

В п. 2.10 приводится анализ продолженной системы методом итерационных расширений на конечномерном подпространстве пространства Соболева.

В п. 2.11 выписывается алгоритм, реализующий метод итерационных расширений для решения задачи, продолженной системы на пространстве Евклида. При выборе итерационных параметров применяется метод минимальных невязок.

В п. 2.12 рассматривается гармоническая система в пространстве Соболева на L-образной области.

В п. 2.13 рассматривается продолженная гармоническая система на конечномерном подпространстве пространства Соболева на квадрате Π.

В этих квадратной области и опоясывающей полосе определяется сетка с узлами

$$(x_i; y_j) = \big((i-1{,}5)h; (j-1{,}5)h\big),\ h = 2{,}5/(n-1{,}5),$$
$$n = 5m-1,\ m \in \mathbb{N},\ i = 1,2...,n,\ j = 1,2...,n.$$

В п. 2.14, 2.15, 2.16, 2.17 приводятся алгоритмы, реализующие методы итерационных расширений, конечных элементов и разностей, для решения задач продолженной и расширенной гармонических систем на квадрате.

В п. 2.18 разбирается пример использования метода итерационных расширений для решения задачи гармонической системы в пространстве Соболева на L-образной области.

В п. 2.19 рассматривается L-образная мембрана при очень малой толщине $\breve{h}$ относительно ее размеров, расположенная горизонтально при закреплении на границе кроме двух больших и смежных сторон. Полагается, что точки мембраны в прямоугольной системе координат принадлежат множеству

$$\big([0;2{,}5]\times[0;2{,}5]\setminus(1{,}5;2{,}5]\times(1{,}5;2{,}5]\big)\times[-\breve{h}/2;\ \breve{h}/2],$$

т.е., когда

$$\Omega_1 = (0;2{,}5)\times(0;2{,}5)\setminus[1{,}5;2{,}5)\times[1{,}5;2{,}5),$$
$$\Omega_{\mathrm{II}} = (1{,}5;2{,}5)\times(1{,}5;2{,}5),\ \Pi = (0;2{,}5)\times(0;2{,}5),$$

а границы областей имеют следующие части

$$\Gamma_{1,1}=\{2,5\}\times(0;1,5)\bigcup(0;1,5)\times\{2,5\}\bigcup\{1,5\}\times(1,5;2,5)\bigcup(1,5;2,5)\times\{1,5\},$$

$$\Gamma_{1,2}=\{0\}\times(0;2,5)\bigcup(0;2,5)\times\{0\},\ \Gamma_{\mathrm{II},1}=\{2,5\}\times(1,5;2,5)\bigcup(1,5;2,5)\times\{2,5\},$$

$$\Gamma_{\mathrm{II},2}=\{1,5\}\times(1,5;2,5)\bigcup(1,5;2,5)\times\{1,5\},$$

$$\Gamma_1=\{2,5\}\times(0;2,5)\bigcup(0;2,5)\times\{2,5\},\ \Gamma_2=\{0\}\times(0;2,5)\bigcup(0;2,5)\times\{0\}.$$

Здесь $\breve{u}_1$ функция перемещения точек L-образной мембраны, расположенной в горизонтальном положении при закреплении на части границы под действием вертикальной нагрузки определяющей правую часть уравнения $\breve{f}_1$. Например, если $\breve{f}_1=0$, то $\breve{u}_1=0$ будет уравнением срединной плоскости в прямоугольной системе с координатами $x,\ y,\ \breve{u}_1$.

Если $\breve{f}_1=$

$$=((392-384x)(64y^3-196y^2+225)+(64x^3-196x^2+225)(392-384y))/184^2,$$

то решением исходной задачи будет уравнение срединной поверхности

$$\breve{u}_1=(64x^3-196x^2+225)(64y^3-196y^2+225)/184^2.$$

Следует рассматривать задачу найти срединную поверхность рассматриваемой мембраны, получающуюся под действием на эту мембрану вертикального давления $\breve{P}_1$ как численное решение задачи гармонической системы в пространстве Соболева на L-образной области, когда коэффициент натяжения $\breve{T}_1=1,5$ и давление

$$\breve{P}_1=1,5((392-384x)(64y^3-196y^2+225)+$$
$$+(64x^3-196x^2+225)(392-384y))/184^2.$$

При решении задачи на ЭВМ подтверждается экспериментально асимптотическая оптимальность метода итерационных расширений по количеству операций.

Рассматривается численное решение приведенной задачи, когда $n=254$. Выбирается нулевое начальное приближение, тогда итерационный процесс метода итерационных расширений останавливается на третьей итерации, если в критерии его остановки задана оценка $\mathrm{E}=0,001$. Дополнительно отмечается, что на последней итерации выполняется неравенство характеризуещее точность численного решения исходной задачи в норме максимум модуля

$$\max\left|u_{i,j}^3-\breve{u}_{i,j}\right|\Big/\max\left|\breve{u}_{i,j}\right|\le 0,0021.$$

Графики последнего приближения и точного решения почти совпадают, если в критерии остановки алгоритма реализующего метод итерационных расширений заранее задается оценка относительной ошибки в более сильной норме, чем энергетическая норма расширенной задачи $\mathrm{E}=0,001$.

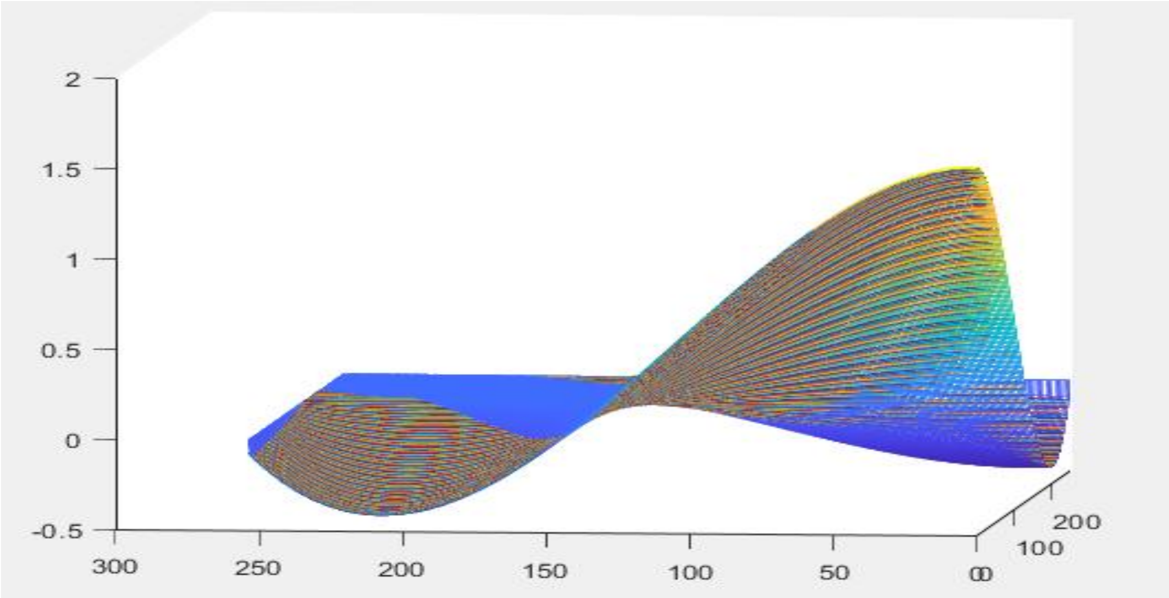

Рис. 3. Графики точного решения и итерационного решения

Для решения приведенной задачи использовались алгоритмы, реализующие методы итерационных расширений, конечных элементов и конечных разностей на квадратной области из п. 2.14, 2.15, 2.16, 2.17.

Третья глава посвящена анализу скалярной системы как обобщению анализа бигармонических и гармонических систем. В п. 3.1 рассматривается система в виде

$$\breve{u}_\omega \in \breve{H}_\omega : [\breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega]_\omega = F_\omega(\breve{v}_\omega)\ \forall \breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega,\ F_\omega \in \breve{H}'_\omega,\ \omega \in \{1, \mathrm{II}\},\ \Omega_\omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (14)$$

где правая часть задачи, если $\breve{f}_1 \in L_2(\Omega_1)-$ заданная функция,

$$F_\omega(\breve{v}_\omega) = \int\limits_{\Omega_\omega} \breve{f}_\omega \breve{v}_\omega d\Omega_\omega\ \ \forall \breve{v}_\omega \in \breve{H}_\omega,\ \breve{f}_{\mathrm{II}} = 0,$$

пространство функций Гильберта $\breve{H}_\omega = \breve{H}_\omega(\Omega_\omega)$, скалярное произведение $[\breve{u}_\omega, \breve{v}_\omega]_\omega$ в этом пространстве. При $\omega = 1$ рассматривается задача скалярной системы. При $\omega = \mathrm{II}$ рассматривается фиктивная задача скалярной системы.

В п. 3.2 приводится продолженная скалярная система

$$\breve{u} \in \breve{V}:\ [\breve{u}, I_1\breve{v}]_1 + [\breve{u}, \breve{v}]_{\mathrm{II}} = F_1(I_1\breve{v})\ \forall \breve{v} \in \breve{V}, \quad (15)$$

где расширенное пространство решений рассматриваемой здесь продолженной задачи пространство функций Гильберта $\breve{V} = \breve{V}(\Pi)$, а области Ω_1, Ω_{II} таковы, что $\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_{\mathrm{II}} = \bar{\Pi}$, $\Omega_1 \cap \Omega_{\mathrm{II}} = \varnothing$, $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_{\mathrm{II}} \neq \varnothing$.

Расширенное пространство решений содержит подпространство решений продолженной задачи

$$\breve{V}_1 = \breve{V}_1(\Pi) = \left\{ \breve{v}_1 \in \breve{V} : \breve{v}_1\big|_{\Pi \setminus \Omega_1} = 0 \right\}.$$

В продолженной задаче используется оператор проектирования расширенного пространства на подпространство решений продолженной задачи

$$I_1 : \breve{V} \mapsto \breve{V}_1,\ \breve{V}_1 = \operatorname{im} I_1,\ I_1 = I_1^2.$$

В п. 3.3 приводится анализ продолженной системы модифицированным методом фиктивных компонент.

В п. 3.4 рассматривается продолженная скалярная система на конечномерном подпространстве пространства Гильберта. Анализируется дискретизация продолженной скалярной системы, когда

$$\Pi = (0; b_1) \times (0; b_2),\ b_1, b_2 \in (0; +\infty).$$

Полагается, что введена прямоугольная сетка с узлами и постоянными и положительными шагами в направлении соответствующих осей координат

$$(x_i; y_j),\ h_1 > 0,\ h_2 > 0,\ i,\ j \in \mathbb{Z}.$$

Вводятся сеточные функции на множестве узлов введенной сетки

$$v_{i,j} = v(x_i; y_j) \in \mathbb{R},\ i,\ j \in \mathbb{Z}.$$

При восполнениях сеточных функций используются в качестве базисных функций функции в узлах сетки, имеющие локальные носители

$$\Phi^{i,j}(x; y) = \Psi^{1,i}(x)\Psi^{2,j}(y),\ i,\ j \in \mathbb{Z}.$$

Соблюдается условие, что базисные функции вне прямоугольной области равны нулю

$$\Phi^{i,j}(x; y) = 0,\ (x; y) \notin \Pi,\ i,\ j \in \mathbb{Z}.$$

Используются линейные комбинации из базисных функций, которые задают конечномерное подпространство в расширенном пространстве решений

$$\tilde{V} = \left\{ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} v_{i,j} \Phi^{i,j}(x; y) \right\} \subset \breve{V}.$$

В п. 3.5 приводится анализ продолженной системы модифицированным методом фиктивных компонент на конечномерном подпространстве.

В п. 3.6 продолженная система рассматривается на пространстве Евклида. Задача продолженной системы после аппроксимации рассматривается в матричном виде как система линейных алгебраических уравнений. При аппроксимации задачи для продолженной системы с помощью конечномерного подпространства, получается система уравнений

$$\bar{u} \in \mathbb{R}^N :\ B\bar{u} = \bar{f},\ \bar{f} \in \mathbb{R}^N. \tag{16}$$

Считается, что оператор проектирования на пространство решений продолженной задачи обнуляет коэффициенты у базисных функций, носители которых не содержатся полностью в первой области. Получается задача продолженной системы в матричном виде, если определить продолженную матрицу и продолженную правую часть системы

$$\left\langle B\bar{u},\bar{v}\right\rangle = [(\tilde{u},I_1\tilde{v})]_1 + [(\tilde{u},\tilde{v})]_{\mathrm{II}}\ \forall\tilde{u},\tilde{v}\in\tilde{V},\ \left\langle \bar{f},\bar{v}\right\rangle = F_1(I_1\tilde{v})\ \forall\tilde{v}\in\tilde{V},$$

$$\left\langle \bar{f},\bar{v}\right\rangle = (\bar{f},\bar{v})h_1h_2 = \bar{f}\,\bar{v}h_1h_2,\ \bar{v} = (v_1,v_2,...,v_N)'\in\mathbb{R}^N,\ N=(m-2)(n-2).$$

При этом нумеруются первыми базисные функции, носители которых полностью лежат в первой области. Затем нумеруются базисные функции, носители которых пересекают границу первой области и второй области вместе. Заканчивается нумерация на базисных функциях, носители которых полностью лежат во второй области. При этой нумерации возникающие векторы имеют данный вид

$$\bar{v} = (\bar{v}_1{}',\bar{v}_2{}',\bar{v}_3{}')',\ \bar{u} = (\bar{u}_1{}',\bar{0}',\bar{0}')',\ \bar{f} = (\bar{f}_1{}',\bar{0}',\bar{0}')'.$$

Матрица имеет такую известную структуру

$$B = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix}.$$

Задаются матрицы, порождаемые скалярными произведениями

$$\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{I}}\bar{u},\bar{v}\right\rangle = [(\tilde{u},\tilde{v})]_1,\ \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{u},\bar{v}\right\rangle = [(\tilde{u},\tilde{v})]_{\mathrm{II}}\ \forall\tilde{u},\tilde{v}\in\tilde{V}.$$

Эти матрицы имеют следующую структуру

$$\mathrm{A}_{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathrm{A}_{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix}.$$

Вводится подпространство векторов

$$\bar{V}_1 = \left\{\bar{v} = (\bar{v}_1{}',\bar{v}_2{}',\bar{v}_3{}')'\in\mathbb{R}^N : \bar{v}_2 = \bar{0},\ \bar{v}_3 = \bar{0}\right\}.$$

Дополнительно определяется подпространство векторов

$$\bar{V}_2 = \left\{\bar{v} = (\bar{v}_1{}',\bar{v}_2{}',\bar{v}_3{}')'\in\mathbb{R}^N : \mathrm{A}_{11}\bar{v}_1 + \mathrm{A}_{12}\bar{v}_2 = \bar{0},\ \mathrm{A}_{32}\bar{v}_2 + \mathrm{A}_{33}\bar{v}_3 = \bar{0}\right\},$$

В п. 3.7 приводится анализ продолженной системы модифицированным методом фиктивных компонент на пространстве Евклида.

В п. 3.8 производится асимптотически оптимальный анализ продолженной системы методом итерационных расширений на пространстве Евклида. Для решения задачи (16) используется новый метод итерационных расширений. Определяется расширенная матрица в виде суммы первой матрицы и второй матрицы, умноженной на положительный параметр

$$C = \mathrm{A}_{\mathrm{I}} + \gamma\mathrm{A}_{\mathrm{II}},$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix}, \gamma \in (0;+\infty).$$

Предполагается, что выполняются положения о продолжении

$$\exists \gamma_1 \in (0;+\infty),\, \gamma_2 \in [\gamma_1;+\infty) : \gamma_1^2 \left\langle C\bar{v}_2, C\bar{v}_2 \right\rangle \le \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{v}_2, \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{v}_2 \right\rangle \le \gamma_2^2 \left\langle C\bar{v}_2, C\bar{v}_2 \right\rangle \ \forall \bar{v}_2 \in \bar{V}_2,$$

$$\exists \alpha \in (0;+\infty) : \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{I}}\bar{v}_2, \mathrm{A}_{\mathrm{I}}\bar{v}_2 \right\rangle \le \alpha^2 \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{v}_2, \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{v}_2 \right\rangle \ \forall \bar{v}_2 \in \bar{V}_2.$$

Метод итерационных расширений является обобщением метода фиктивных компонент, когда используются дополнительные параметры при выборе расширенной матрицы, а итерационные параметры выбираются на основе метода минимальных невязок

$$\bar{u}^k \in \mathbb{R}^N : C(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(B\bar{u}^{k-1} - \bar{f}),\ k \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

$$\forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_1,\ \gamma > \alpha,\ \tau_0 = 1,\ \tau_{k-1} = \left\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle \Big/ \left\langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

где для вычисления итерационных параметров последовательно вычисляются невязки, поправки, эквивалентные невязки

$$\bar{r}^{k-1} = B\bar{u}^{k-1} - \bar{f},\ \bar{w}^{k-1} = C^{-1}\bar{r}^{k-1},\ \bar{\eta}^{k-1} = B\bar{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

Определяется норма, порождаемая расширенной матрицей

$$\|\bar{v}\|_{C^2} = \sqrt{\left\langle C^2\bar{v}, \bar{v} \right\rangle}\ \ \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^N.$$

Теорема 3. (3.8.1) *Для метода итерационных расширений* (17) при анализе скалярной системы *имеет место оценка сходимости*

$$\left\|\bar{u}^k - \bar{u}\right\|_{C^2} \le \varepsilon \left\|\bar{u}^0 - \bar{u}\right\|_{C^2},\ \varepsilon = 2(\gamma_2/\gamma_1)(\alpha/\gamma)^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

В п. 3.9 приводится анализ продолженной системы методом итерационных расширений в пространстве Гильберта.

В п. 3.10 приводится анализ продолженной системы методом итерационных расширений на конечномерном подпространстве пространстве Гильберта.

В п. 3.11 выписывается алгоритм, реализующий метод итерационных расширений для решения задачи, продолженной системы на пространстве Евклида. При выборе итерационных параметров применяется метод минимальных невязок.

Заключение. Решена фундаментальная научная проблема – разработан новый метод итерационных расширений, асимптотически оптимальный по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором значений итерационного параметра при обработке информации для анализа бигармонических, гармонических и скалярных систем.

Были получены следующие результаты:

1. Метод и алгоритм итерационных расширений, асимптотически оптимальные по количеству операций, с автоматизацией управления

оптимальным выбором значений итерационного параметра при обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа бигармонических систем. В методе итерационных расширений используется введение параметра, имеющего в приложениях физический смысл жесткости пластины, а минимизация ошибки ведется в более сильной норме, чем энергетическая норма. В рамках нового направления метод итерационных расширений разработан асимптотически оптимальный по вычислительным затратам метод решения бигармонической проблемы в геометрически сложных областях.

2. Метод и алгоритм итерационных расширений, асимптотически оптимальные по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором значений итерационного параметра при обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа гармонических систем. В методе итерационных расширений используется введение параметра, имеющего в приложениях физический смысл натяжения мембраны, а минимизация ошибки ведется в более сильной норме, чем энергетическая норма. В рамках нового направления метод итерационных расширений разработан асимптотически оптимальный по вычислительным затратам метод решения задач гармонических систем в геометрически сложных областях отличающийся простотой реализации и обобщений в отличии от метода фиктивного пространства.

3. Метод и алгоритм итерационных расширений, асимптотически оптимальные по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором значений итерационного параметра при обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа скалярных систем как обобщения метода и алгоритма итерационных расширений для гармонических, бигармонических и других систем.

4. Специальное математическое и алгоритмическое обеспечение, реализующее метод итерационных расширений, асимптотически оптимальное по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором значений итерационного параметра при обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении задаваемой оценки точности для анализа бигармонических систем. Это обеспечение позволяет решать модельные задачи бигармонических систем с получением графических представлений решений.

5. Специальное математическое и алгоритмическое обеспечение, реализующее метод итерационных расширений, асимптотически оптимальное по количеству операций, с автоматизацией управления оптимальным выбором значений итерационного параметра при обработке информации и с критерием остановки итераций при достижении

задаваемой оценки точности для анализа гармонических систем. Это обеспечение позволяет решать модельные задачи гармонических систем с получением графических представлений решений.

Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы. Разработать метод итерационных расширений для анализа экранированных гармонических систем, экранированных бигармонических систем и биэкранированных бигармонических систем, описывающих соответствующие стационарные физические системы.

Список публикаций автора

Основные публикации автора по теме диссертации. Статьи, опубликованные в ведущих российских рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК при Министерстве науки и высшего образования РФ, и в рецензируемых научных журналах и изданиях, индексируемых Scopus

1. Ushakov, A.L. Analysis of Biharmonic and Harmonic Models by the Methods of iterative Extensions / A.L. Ushakov, E.A. Meltsaykin // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. – 2022. – V. 15, № 3. – P. 51–66. (ВАК, WoS, Scopus)

2. Ushakov, A.L. Analysis of the Problem for the Biharmonic Equation / A.L. Ushakov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2022. – V. 9, № 1. – P. 43–58. (MathSciNet, ВАК)

3. Ushakov, A.L. Analysis of the Boundary Value Problem for the Poisson Equation / A.L. Ushakov // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics, Mechanics, Physics. – 2022. – V. 14, № 1. – P. 64–76. (RSCI, ZbMath, ВАК)

4. Ушаков, А.Л. Исследование задачи представления линейного функционала в форме скалярного произведения / А.Л. Ушаков // Вестник Югорского государственного университета. – 2022. – Выпуск 3(66). – С. 152–162. (ВАК)

5. Ushakov, A.L. Research of the boundary value problem for the Sophie Germain Equationinin in a cyber-physical system / A.L. Ushakov // Studies in Systems, Decision and Control. Springer. – 2021. – V. 338. P. 51–63. (Scopus)

6. Ушаков, А.Л. Анализ смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона / А.Л. Ушаков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, Механика, Физика. – 2021. – Т. 13, № 1. – С. 29–40. (RSCI, ZbMath, ВАК)

7. Ushakov, A.L. Numerical Anallysis of the Mixed Boundary Value Problem for the Sophie Germain Equation / A.L. Ushakov // Journal

of Computational and Engineering Mathematics. – 2021. – V. 8, № 1. – P. 46–59. (MathSciNet, ВАК)

8. Ushakov, A.L. Investigation of a Mixed Boundary Value Proble for the Poisson Equation / A.L. Ushakov // 2020 International Russian Automation Conference (RusAutoCon), Sochi, Russia. – 2020. – P. 273–278. (Scopus)

9. Ушаков, А.Л. Асимптотически оптимальное решение модельной задачи для экранированного уравнения Пуассона / А.Л. Ушаков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, Механика, Физика. – 2019. – Т. 11, № 2. – С. 25–35. (RSCI, ZbMath, ВАК)

10. Ушаков, А.Л. Быстрое решение модельной задачи для бигармонического уравнения / А.Л. Ушаков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, Механика, Физика. – 2019. – Т. 11, № 1. – С. 34–42. (RSCI, ZbMath, ВАК)

11. Ушаков, А.Л. Быстрое решение модельной задачи для уравнения Пуассона / А.Л. Ушаков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, Механика, Физика. – 2017. – Т. 9, № 4. – С. 36–42. (ZbMath, ВАК)

12. Ушаков, А.Л. О моделировании деформаций пластин / А.Л. Ушаков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, №2. – С. 138–142. (Scopus)

13. Ушаков, А.Л. Итерационная факторизация на фиктивном продолжении для численного решения эллиптического уравнения четвёртого порядка / А.Л. Ушаков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, Механика, Физика. – 2014. – Т. 6, №2. – С. 17–22. (ZbMath, ВАК)

14. Ушаков, А.Л. Итерационная факторизация для численного решения эллиптического уравнения четвёртого порядка в прямоугольной области / А.Л. Ушаков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, Механика, Физика. – 2014. – Т. 6, №1. – С. 42–49. (ZbMath, ВАК)

15. Ушаков, А.Л. Модификация итерационной факторизации для численного решения двух эллиптических уравнений второго порядка в прямоугольной области / А.Л. Ушаков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика, Механика, Физика. – 2013. – Т. 5, №2. – С. 88–93. (ZbMath, ВАК)

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ по теме диссертации

16. Расчет поля температуры от тепловых источников № 2022663814 / Ушаков А.Л., Мельцайкин Е.А. (RU); правообладатель ФГАОУ ВО

«Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». - 2022663254; заявл. 18.07.2022; зарегистр. 20.07.2022, реестр программ для ЭВМ.

17. Численное решение модельной задачи для экранированного уравнения Пуассона № 2020667216 / Ушаков А.Л., Мельцайкин Е.А. (RU); правообладатель ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». - 2020666269; заявл. 09.12.2020; зарегистр. 21.12.2020, реестр программ для ЭВМ.

18. Асимптотически оптимальный расчет распределения температуры и перемещения в стержнях № 2020665998 / Ушаков А.Л., Мельцайкин Е.А. (RU); правообладатель ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». - 2020664697; заявл. 23.11.2020; зарегистр. 03.12.2020, реестр программ для ЭВМ.

19. Асимптотически оптимальный расчет балки при смешанных краевых условиях симметрии и Дирихле № 2020664402 / Ушаков А.Л., Мельцайкин Е.А. (RU); правообладатель ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». - 2020663735; заявл. 10.11.2020; зарегистр. 12.11.2020, реестр программ для ЭВМ.

20. Программное обеспечение анализа стационарных физических систем методом итерационных расширений № 2023660254 / Ушаков А.Л. (RU); правообладатель Ушаков Андрей Леонидович (RU). - 2020618503; заявл. 02.05.2023; зарегистр. 18.05.2023, реестр программ для ЭВМ.

Другие научные публикации

21. Ushakov, A.L. A Review of Mathematical Models of Elasticity Theory Based on the Methods of Iterative Factorizations and Fictitious Components / A.L. Ushakov, S.A. Zagrebina, S.V. Aliukov, A.A. Alabugin, K.V. Osintsev // Mathematics. – 2023. – V. 11, № 420. – 17 p. (WoS, Scopus)

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета
Подписано в печать 19.07.2023. Формат 60×84 1/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 1,86. Тираж 150 экз. Заказ 270/268.
Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.