

На правах рукописи



Нафикова Альбина Ринатовна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ  
ПЕРЕНОСА РАДОНА В КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ  
АНИЗОТРОПНЫХ СЛОИСТЫХ СРЕДАХ  
С ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Автореферат  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

ЧЕЛЯБИНСК — 2015

Работа выполнена в Стерлитамакском филиале ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет»

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук, профессор  
Кризский Владимир Николаевич

**Официальные оппоненты:** Маликов Рамиль Фарукович,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, лаборатория системного анализа и математического моделирования, заведующий лабораторией

Мухаметзянов Ирик Зирягович,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
Уфимский государственный нефтяной технический университет, кафедра математики, профессор

**Ведущая организация:** Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт геофизики им. Ю.П. Булашевича» Уральского отделения Российской академии наук

Защита состоится 25 декабря 2015 г. в 11:30 часов на заседании диссертационного совета Д 212.298.14 при Южно-Уральском государственном университете, по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, ауд. 1001.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета, а также на сайте <http://www.susu.ac.ru/ru/dissertation/d-21229814/nafikova-albina-rinatovna>.

Автореферат разослан 21 октября 2015 г.

Учёный секретарь  
диссертационного совета  
д.ф.-м.н., доцент



А.В. Келлер

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Процессы тепломассопереноса описываются краевыми задачами математической физики параболического типа. Проблема переноса вещества в диффундирующих слоистых средах является предметом исследований как теоретиков, так и практиков различных областей: медицины, экологии, геологии и геофизики.

Так, в области медицины актуальны задачи достижения необходимых для лечения концентраций медицинских препаратов в тканях человека, имеющих, как правило, слоистую структуру, в необходимые интервалы времени. Известные математические модели переноса лекарственных препаратов при поверхностном или внутримышечном воздействиях имеют вид одномерной краевой задачи в кусочно-однородных слоистых средах. Но используемые модели не учитывают анизотропию диффузионных свойств тканей (например, мышечных) или возможные локальные образования измененных тканей (например, онкологических опухолей).

В области геологии и геофизики актуальными являются задачи переноса радона и дочерних продуктов его распада, измерений параметров радоновых полей, результаты которых используются при поисках месторождений радиоактивных и углеводородных ископаемых, геологическом картировании, прогнозе горных ударов и тектонических землетрясений, экологической оценке мест под строительство зданий и сооружений, оценке санитарного состояния помещений.

Широкий круг использования радона влечет изучение механизмов миграции (переноса) радона в земной коре, факторов, формирующих радоновые поля, вопросов метрологического обеспечения. Все это в совокупности способствует развитию методов математического моделирования в различных геологических средах процессов переноса радона и дочерних продуктов его распада.

Математическое моделирование процессов распределения радона в грунте и его стока в приземный слой атмосферы связано с решением параболических краевых задач математической физики. Разработка математических моделей, алгоритмов решения и программ расчета процессов распространения радона – актуальная задача, имеющая практическое значение.

Построению и исследованию математических моделей процессов переноса радона посвящены работы Ю.П. Булашевича, В.И. Уткина, Г.Ф. Новикова, А.Г. Грамакова, И.М. Хайковича, И.В. Павлова, Л.А. Гулабянца, А.К. Юркова, Д.Ю. Демежко, В.А. Щапова, И.А. Козловой, Е.Н. Рыбакова, В.С. Яковлевой, Н.К. Рыжаковой, Р.И. Паровика, А.В. Климшина, Т. Kohl, G. Etiope, M. Jiranek, I. Cozmata, W.J. Speelman, M. Goto, M. Antonopoulos-Domis, S. Savovic, A. Varchegy, I. Suaro и др.

Имеющиеся в научной литературе публикации по расчету параметров радоновых полей (концентрации, объемной активности или плотности потока радона) основаны только на одномерных, либо диффузионных, либо диффузионно-фильтрационных (диффузионно-конвективных, диффузионно-адвективных) математических моделях в кусочно-однородных геологических слоистых средах.

В настоящей работе рассматривается новая математическая модель трехмерной задачи диффузии-адвекции радона, учитывающая анизотропию диффузионных свойств геологической среды и геометрию локальных включений.

**Целью** работы является исследование процессов диффузии-адвекции радона в трехмерных кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями.

Для достижения поставленной цели решены следующие **задачи**:

1. Анализ состояния вопроса.
2. Построение математической модели задачи о распределении радона в кусочно-анизотропной горизонтально-слоистой среде с включениями.
3. Разработка численных алгоритмов решения поставленной задачи.
4. Разработка программного комплекса, дающего следующие возможности: задание параметров описания модели; нахождение функции нормального поля радона и функции Грина в горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами; определение функции аномального поля радона, учитывающей влияние анизотропных включений; графического отображения результатов расчетов.
5. Проведение вычислительных экспериментов по исследованию процессов переноса радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями и взаимному влиянию параметров математической модели.

**Научная новизна:** *В области математического моделирования:* впервые построена математическая модель трехмерной задачи диффузии-адвекции радона в кусочно-постоянных слоистых средах с включениями, учитывающая анизотропию диффузионных свойств подобластей геологической среды; получены формулы интегрального представления решения, аналитические формулы представления решения задач для функции нормального поля радона и функции Грина для случая горизонтально-слоистого плоско-параллельного пространства.

*В области численных методов:* разработаны новые алгоритмы расчета объемной активности радона в кусочно-анизотропной горизонтально-слоистой среде с анизотропным включением, основанные на сочетании методов интегральных преобразований Лапласа, интегральных представлений по формуле Остроградского с построением функции Грина в слоистой среде без включений и интегральных уравнений Фредгольма II рода, возникающих по границам раздела сред, алгоритмы расчета функции нормального поля радона; алгоритмы расчета функции точечного источника в горизонтально-слоистой среде (функции Грина).

*В области комплексов программ:* разработаны программы, реализующие численные алгоритмы нахождения функции нормального поля радона и функции Грина в кусочно-однородной горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами, обращения интегрального преобразования Лапласа и позволяющие проводить вычислительные эксперименты по исследованию процессов переноса радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями и взаимному влиянию параметров математической модели.

**Теоретическая и практическая значимость.** Предложенные комбинированные методы и алгоритмы являются развитием теории решения краевых задач для уравнений тепломассопереноса в кусочно-постоянных анизотропных средах и позволяют решать практические задачи по исследованию процессов переноса вещества в трехмерных кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с анизотропными локальными включениями. Полученные решения по исследованию радоновых полей могут быть использованы для прогнозирования сейсмических событий, поиска урановых и ториевых руд, экологического картирования при выборе площадок под строительство

промышленных и жилых сооружений, поиска и оконтуривания нефтяных и газовых месторождений.

**Достоверность** изложенных в работе результатов обеспечивается строгостью постановки задачи как краевой задачи математической физики для уравнений параболического типа, математически обоснованными вычислительными алгоритмами ее решения и апробацией разработанных вычислительных алгоритмов на различных примерах. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами для частного случая кусочно-постоянных однородных плоско-параллельных горизонтально-слоистых сред, а также, для этого случая, согласуются с натурными экспериментами, проведенными лабораторией геодинамики ИГф УрО РАН.

**Методы исследования** основаны на основе современных методов математического моделирования, теории уравнений математической физики, численных методов.

Алгоритм решения задачи построен на использовании комбинации методов: интегральных преобразований; интегральных представлений на основе формулы Остроградского, обобщенной на случай анизотропных сред с симметричными тензорами анизотропии, с построением функции Грина вмещающего пространства; интегральных уравнений Фредгольма второго рода. При численной реализации алгоритма применялись квадратурные формулы наивысшей степени точности Гаусса для численного обращения интегрального преобразования Лапласа и интегрального преобразования Ханкеля-Вебера. Система интегральных уравнений Фредгольма второго рода сведена методом Крылова-Боголюбова к системе линейных алгебраических уравнений с симметричной матрицей с диагональным преобладанием, для решения которой использован эффективный метод квадратного корня. Вычисление значений специальных функций реализовывалось встроенными процедурами пакета Maple.

**Апробация работы.** Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на семинаре лаборатории геодинамики (г. Екатеринбург, ИГф УрО РАН, 2015), 42-й сессии Международного научного семинара им. Д. Г. Успенского «Вопросы теории и практики геологической интерпретации геофизических полей» (г. Пермь, Горный институт УрО РАН, ПГНИУ, 2015), Всероссийской конференции с международным участием «Алгоритмический анализ неустойчивых задач» (г. Челябинск, ЮУрГУ, 2014), XI Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» с участием зарубежных ученых (г. Саранск, СВМО, НИ МГУ им. Н.П. Огарева, 2014), XV Уральской молодежной научной школе по геофизике (г. Екатеринбург, ИГф УрО РАН, 2014), VI Международной математической школе-семинаре «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» им. Е.В. Воскресенского (г. Саранск, СВМО, НИ МГУ им. Н.П. Огарева, 2013), Международной научно-практической конференции «Измерения: состояние, перспективы развития» (г. Челябинск, ЮУрГУ, 2012), Международной школе-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (г. Уфа, БГУ, 2012), Всероссийской молодежной научно-практической конференции «Актуальные вопросы науки и образования» (г. Уфа, БГУ, 2013), Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» (г. Стерлитамак, Институт прикладных исследований РБ АН РБ, Стерлитамакский филиал БашГУ, 2013), Межвузовской студенческой научно-практической конференции по при-

кладной математике (г. Стерлитамак, Стерлитамакский филиал БашГУ, 2012), II и III Всероссийских научно-практических конференциях с международным участием «Математическое моделирование процессов и систем» (г. Стерлитамак, Стерлитамакский филиал БашГУ, 2013, 2014), научных семинарах кафедры математического моделирования Стерлитамакского филиала БашГУ.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 19 работах [1-19], из них 2 статьи [1,2] опубликованы в журналах из перечня ведущих российских рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ, 2 свидетельства о регистрации программных продуктов [3,4] в Общероссийском фонде электронных ресурсов «Наука и образование» Минобрнауки РФ. Из работ, выполненных в соавторстве [1-6, 9-13, 15-17], в диссертацию вошли только результаты, полученные ее автором. Список работ приводится в конце автореферата.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и приложения. Полный ее объем составляет 101 страницу машинописного текста, включая 42 рисунка, 6 таблиц, библиографию, содержащую 140 наименований, приложение.

## Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

**Первая глава** посвящена обзору научной литературы и состоянию изучаемой проблемы.

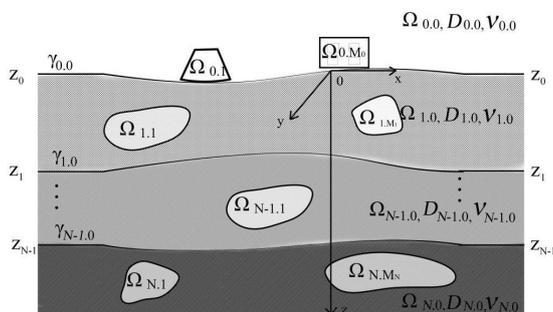


Рисунок 1 — Горизонтально-слоистая среда с включениями

В **разделе 1.1** приводится характеристика радона и его свойств, выделяются два направления радоновой проблемы, в которых ведутся научные исследования, а также рассматривается вопрос о параметрах, характеризующих радоновое поле и подлежащих измерению, их важности и значению в геофизических и экологических исследованиях.

**Раздел 1.2** посвящен описанию механизмов выделения и переноса радона в приземный слой атмосферы. В **разделе 1.3** указываются работы отечественных и зарубежных авторов, посвященные построению и исследованию математических моделей процессов переноса радона, а также приводится сравнительный анализ моделей.

Во **второй главе** исследуется математическая модель задачи переноса радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями.

В **разделе 2.1** приводится постановка задачи и алгоритм ее решения. Пусть среда (рис. 1) разделена гладкими параметрически заданными границами  $\gamma_{i,0} = \{\gamma_{i,0}(x, y) | \gamma_{i,0} \rightarrow z_i = const \text{ при } \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty\}$  ( $i = \overline{0, N}$ ) на горизонтальные слои  $\Omega_{0,0}, \Omega_{1,0}, \dots, \Omega_{N,0}$ , заполненные веществом, диффузионные свойства которых описы-

ваются постоянными симметричными тензорами  $D_{i,0} = \begin{pmatrix} d_{xx}^{i,0} & d_{xy}^{i,0} & d_{xz}^{i,0} \\ d_{xy}^{i,0} & d_{yy}^{i,0} & d_{yz}^{i,0} \\ d_{xz}^{i,0} & d_{yz}^{i,0} & d_{zz}^{i,0} \end{pmatrix}$  и скоростями адвекции  $\nu_{0,0}, \nu_{1,0}, \dots, \nu_{N,0}$  соответственно.

Каждый слой  $\Omega_{i,0}$  содержит  $M_i$  локальных включений  $\Omega_{i,j} (j = \overline{1, M_i})$  с гладкими границами  $\gamma_{i,j}$ , заполненных веществом, физические свойства которых описываются постоянными симметричными тензорами диффузии  $D_{i,j} = \begin{pmatrix} d_{xx}^{i,j} & d_{xy}^{i,j} & d_{xz}^{i,j} \\ d_{xy}^{i,j} & d_{yy}^{i,j} & d_{yz}^{i,j} \\ d_{xz}^{i,j} & d_{yz}^{i,j} & d_{zz}^{i,j} \end{pmatrix}$  и скоростями адвекции  $\nu_{i,j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}$ .

Математическая модель переноса радона в области исследования  $\Omega = \bigcup_{i=0}^N \bigcup_{j=0}^{M_i} \Omega_{i,j} \subset R^3$  может быть представлена начально-краевой задачей для уравнения в частных производных параболического типа:

$$\frac{\partial A_{i,j}(P,t)}{\partial t} = \text{div}(D_{i,j} \overline{\nabla} A_{i,j}(P,t)) + \nu_{i,j} \frac{\partial A_{i,j}(P,t)}{\partial z} - \lambda(A_{i,j}(P,t) - A_{i,\infty}), \quad (1)$$

$$P = P(x, y, z) \in \Omega_{i,j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i};$$

$$\begin{aligned} & ((D_{i,0} \overline{\nabla} A_{i,0}(P,t), \overline{n}) + \nu_{i,0} A_{i,0}(P,t))|_{\gamma_{i,0}} = \\ & = ((D_{i+1,0} \overline{\nabla} A_{i+1,0}(P,t), \overline{n}) + \nu_{i+1,0} A_{i+1,0}(P,t))|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$A_{i,0}(P,t)|_{\gamma_{i,0}} = A_{i+1,0}(P,t)|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & ((D_{i,j} \overline{\nabla} A_{i,j}(P,t), \overline{n}) + \nu_{i,j} A_{i,j}(P,t))|_{\gamma_{i,j}} = \\ & = ((D_{i,0} \overline{\nabla} A_{i,0}(P,t), \overline{n}) + \nu_{i,0} A_{i,0}(P,t))|_{\gamma_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$A_{i,j}(P,t)|_{\gamma_{i,j}} = A_{i,0}(P,t)|_{\gamma_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}; \quad (5)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} A_{N,0}(P,t) = A_{N,\infty}, \lim_{z \rightarrow -\infty} A_{0,0}(P,t) = 0; \quad (6)$$

$$\lim_{P \in \Omega_{i,0}, \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} A_{i,0}(P,t) = A_i(P,t), i = \overline{0, N}; \quad (7)$$

$$A_{i,j}(P,0) = 0, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i}. \quad (8)$$

Здесь  $A_{i,j}(P,t)$  – функция объемной активности радона (ОАР) в грунте,  $A_{i,j}(P,t) \in C_P^2(\Omega) \cap C_P^1(\gamma_{i,j}) \cap C_t^1(\Omega)$ ;  $\lambda$  – постоянная распада радона;  $A_{i,\infty}$  – ОАР, находящегося в радиоактивном равновесии с радием ( $^{226}\text{Ra}$ ) в грунте  $i$ -го слоя, которая равна  $A_{i,\infty} = K_{i,em} A_{i,Ra} \rho_{i,s} (1 - \eta_i)$ ,  $K_{i,em}$  – коэффициент эманирования радона,  $A_{i,Ra}$  – удельная активность  $^{226}\text{Ra}$ ,  $\rho_{i,s}$  – плотность твердых частиц,  $\eta_i$  – пористость грунта,  $A_i(P,t)$  – нормальное поле радона, описывающее диффузию-адвекцию радона в слоистой среде в предположении отсутствия включений. Переменная  $t \geq 0$  – время.

Если область  $\Omega_{0,0}$  – приземный слой атмосферы, то в задаче (1) – (8) следует положить  $A_{0,\infty} = 0$ . При  $M_0 > 0$  включения  $\Omega_{0,1}, \dots, \Omega_{0,M_0}$  могут описывать жилые и производственные сооружения.

Представим искомую функцию ОАР в грунте  $A_{i,j}(P,t)$  в виде суммы двух вспомогательных функций нормального  $A_i(P,t)$  и аномального  $\overline{A}_{i,j}(P,t)$  полей:

$$A_{i,j}(P,t) = A_i(P,t) + \overline{A}_{i,j}(P,t), i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i}, \quad (9)$$

где нормальное поле описывает поле радона в горизонтально-слоистой среде без включений и определяется краевой задачей:

$$\frac{\partial A_i(P,t)}{\partial t} = \text{div}(D_{i,0} \overline{\nabla} A_i(P,t)) + \nu_{i,0} \frac{\partial A_i(P,t)}{\partial z} - \lambda(A_i(P,t) - A_{i,\infty}), \quad (10)$$

$$P \in \Omega_{i,0}, i = \overline{0, N};$$

$$\begin{aligned} & ((D_{i,0} \overline{\nabla} A_i(P,t), \overline{n}) + \nu_{i,0} A_i(P,t))|_{\gamma_{i,0}} = \\ & = ((D_{i+1,0} \overline{\nabla} A_{i+1}(P,t), \overline{n}) + \nu_{i+1,0} A_{i+1}(P,t))|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$A_i(P, t)|_{\gamma_{i,0}} = A_{i+1,0}(P, t)|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \quad (12)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} A_N(P, t) = A_{N,\infty}; \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} A_0(P, t) = 0; \quad (13)$$

$$\lim_{P \in \Omega_i, \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} A_i(P, t) = \widetilde{A}_i(z, t), i = \overline{0, N}; \quad (14)$$

$$A_i(P, 0) = 0, i = \overline{0, N}, \quad (15)$$

где  $\widetilde{A}_i(z, t)$  – ОАР в кусочно-однородной горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами  $z = z_i, i = \overline{0, N-1}$  и коэффициентами диффузии  $\widetilde{d}_i = d_{zz}^{i,0}, i = \overline{0, N}$ .

С учетом задачи (10) – (15) аномальное поле радона удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\frac{\partial \overline{A}_{i,j}(P, t)}{\partial t} = \operatorname{div}(D_{i,j} \overline{\nabla} \overline{A}_{i,j}(P, t)) + \nu_{i,j} \frac{\partial \overline{A}_{i,j}(P, t)}{\partial z} - \lambda \overline{A}_{i,j}(P, t), \quad (16)$$

$$P \in \Omega_{i,j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i};$$

$$((D_{i,0} \overline{\nabla} \overline{A}_{i,0}(P, t), \overline{n}) + \nu_{i,0} \overline{A}_{i,0}(P, t))|_{\gamma_{i,0}} = \quad (17)$$

$$= ((D_{i+1,0} \overline{\nabla} \overline{A}_{i+1,0}(P, t), \overline{n}) + \nu_{i+1,0} \overline{A}_{i+1,0}(P, t))|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1};$$

$$\overline{A}_{i,0}(P, t)|_{\gamma_{i,0}} = \overline{A}_{i+1,0}(P, t)|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \quad (18)$$

$$((D_{i,j} \overline{\nabla} \overline{A}_{i,j}(P, t), \overline{n}) + \nu_{i,j} \overline{A}_{i,j}(P, t))|_{\gamma_{i,j}} = \quad (19)$$

$$= ((D_{i,0} \overline{\nabla} \overline{A}_{i,0}(P, t), \overline{n}) + \nu_{i,0} \overline{A}_{i,0}(P, t) + \psi_{i,0}(P, t))|_{\gamma_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i},$$

$$\psi_{i,0}(P, t) = ((D_{i,0} - D_{i,j}) \overline{\nabla} \overline{A}_i(P, t), \overline{n}) + (\nu_{i,0} - \nu_{i,j}) \overline{A}_i(P, t); \quad (20)$$

$$\overline{A}_{i,j}(P, t)|_{\gamma_{i,j}} = \overline{A}_{i,0}(P, t)|_{\gamma_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}; \quad (21)$$

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \overline{A}_{i,0}(P, t) = 0, i = \overline{0, N}; \quad (22)$$

$$\overline{A}_{i,j}(P, 0) = 0, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i}. \quad (23)$$

Сделаем в задаче (16) – (23) замену вида:

$$\overline{A}_{i,j}(P, t) = e^{-\lambda t} u_{i,j}(P', t), P' = (x, y, z + \nu_{i,j} t). \quad (24)$$

Получим задачу:

$$\frac{\partial u_{i,j}(P', t)}{\partial t} = \operatorname{div}(D_{i,j} \overline{\nabla} u_{i,j}(P', t)), P' \in \Omega_{i,j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i}; \quad (25)$$

$$((D_{i,0} \overline{\nabla} u_{i,0}(P', t), \overline{n}) + \nu_{i,0} u_{i,0}(P', t))|_{\gamma'_{i,0}} = \quad (26)$$

$$= ((D_{i+1,0} \overline{\nabla} u_{i+1,0}(P', t), \overline{n}) + \nu_{i+1,0} u_{i+1,0}(P', t))|_{\gamma'_{i,0}}, i = \overline{0, N-1};$$

$$((D_{i,j} \overline{\nabla} u_{i,j}(P', t), \overline{n}) + \nu_{i,j} u_{i,j}(P', t))|_{\gamma'_{i,j}} = \quad (27)$$

$$= ((D_{i,0} \overline{\nabla} u_{i,0}(P', t), \overline{n}) + \nu_{i,0} u_{i,0}(P', t) + \psi_{i,0}(P', t))|_{\gamma'_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i};$$

$$u_{i,j}(P', t)|_{\gamma'_{i,0}} = u_{i,0}(P', t)|_{\gamma'_{i,0}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}; \quad (28)$$

$$\lim_{P' \rightarrow \infty} u_{i,0}(P', t) = 0, i = \overline{0, N}; \quad (29)$$

$$u_{i,j}(P', 0) = 0, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i}. \quad (30)$$

Применим к задаче (25) – (30) способ решения, описанный в работе<sup>1</sup>, используя интегральное преобразование Лапласа

$$F(P', s) = \int_0^{\infty} u(P', t)e^{-st} dt \quad (31)$$

с формулой обращения Римана-Меллина

$$u(P', t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(P', s)e^{st} ds. \quad (32)$$

Получим семейство краевых задач относительно параметра  $s$ :

$$\operatorname{div}(D_{i,j} \bar{\nabla} F_{i,j}(P', s)) - sF_{i,j}(P', s) = 0, P' \in \Omega_{i,j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i}; \quad (33)$$

$$((D_{i,0} \bar{\nabla} F_{i,0}(P', s), \bar{n}) + \nu_{i,0} F_{i,0}(P', s))|_{\gamma'_{i,0}} = \quad (34)$$

$$= ((D_{i+1,0} \bar{\nabla} F_{i+1,0}(P', s), \bar{n}) + \nu_{i+1,0} F_{i+1,0}(P', s))|_{\gamma'_{i,0}}, i = \overline{0, N-1};$$

$$F_{i,0}(P', s)|_{\gamma'_{i,0}} = F_{i+1,0}(P', s)|_{\gamma'_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \quad (35)$$

$$((D_{i,j} \bar{\nabla} F_{i,j}(P', s), \bar{n}) + \nu_{i,j} F_{i,j}(P', s))|_{\gamma'_{i,j}} = \quad (36)$$

$$= ((D_{i,0} \bar{\nabla} F_{i,0}(P', s), \bar{n}) + \nu_{i,0} F_{i,0}(P', s) + F_{\psi_{i,0}}(P', s))|_{\gamma'_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i},$$

$$F_{\psi_{i,0}}(P', s) = ((D_{i,0} - D_{i,j}) \bar{\nabla} F_i(P', s), \bar{n}) + (\nu_{i,0} - \nu_{i,j}) F_i(P', s); \quad (37)$$

$$F_{i,j}(P', s)|_{\gamma'_{i,j}} = F_{i,0}(P', s)|_{\gamma'_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}; \quad (38)$$

$$\lim_{P' \rightarrow \infty} F_{i,j}(P', s) = 0, i = \overline{0, N}, \quad (39)$$

где функции  $F_{\psi_{i,0}}(P', s)$  и  $F_i(P', s)$  – есть образы функций  $\psi_{i,0}(P', t)$  и  $A_i(P', t)$  при преобразовании (31) соответственно.

Решим задачу (33)–(39) методом интегральных представлений и интегральных уравнений. Для этого рассмотрим вспомогательную задачу для функции Грина  $G(P, Q)$  – функции точечного источника, находящегося в произвольной точке  $Q(x_q, y_q, z_q)$  и генерирующего диффузионное поле единичной интенсивности во вмещающем пространстве (в слоистой среде без включений):

$$\operatorname{div}(D_{i,0} \bar{\nabla} G_{i,0}(P', Q)) - sG_{i,0}(P', Q) = -\delta(P', Q), P' \in \Omega_{i,0}, i = \overline{0, N}; \quad (40)$$

$$((D_{i,0} \bar{\nabla} G_{i,0}(P', Q), \bar{n}) + \nu_{i,0} G_{i,0}(P', Q))|_{\gamma'_{i,0}} = \quad (41)$$

$$= ((D_{i+1,0} \bar{\nabla} G_{i+1,0}(P', Q), \bar{n}) + \nu_{i+1,0} G_{i+1,0}(P', Q))|_{\gamma'_{i,0}}, i = \overline{0, N-1};$$

$$G_{i,0}(P', Q)|_{\gamma'_{i,0}} = G_{i+1,0}(P', Q)|_{\gamma'_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \quad (42)$$

$$\lim_{P' \rightarrow \infty} G_{i,0}(P', Q) = 0, i = \overline{0, N}. \quad (43)$$

Тогда, согласно<sup>1</sup>, в области  $\Omega$  получим интегральное представление решения задачи (33)–(39):

$$F(P', s) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{M_i} \int_{\gamma'_{i,j}} F_{i,j}(Q, s) [(\nu_{i,0} - \nu_{i,j}) G_{i,0}(P', Q) + \quad (44)$$

$$+ ((D_{i,0} - D_{i,j}) \bar{\nabla} G_{i,0}(P', Q), \bar{n}_Q)] d\gamma'_{i,j} + \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{M_i} \int_{\gamma'_{i,j}} F_{\psi_{i,0}}(Q, s) G_{i,0}(P', Q) d\gamma'_{i,j},$$

<sup>1</sup>Кризский, В.Н. О способе вычисления физических полей в кусочно-анизотропных средах. Часть II. Нестационарные поля / В.Н. Кризский // Вестник Башкирского университета. – 2009. – Т. 14, №4. – С. 1302-1306.

где  $\bar{n}_Q$  – вектор внешней нормали к границе включения в точке  $Q$ , а граничные значения функции  $F_{i,j}(Q, s)$  находятся, как решение системы интегральных уравнений Фредгольма II рода, формируемых из (33)–(39) при  $P' \in \gamma'_{i,j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}$ :

$$F_{i,j}(P', s) - \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{M_i} \int_{\gamma'_{i,j}} F_{i,j}(Q, s) [(\nu_{i,0} - \nu_{i,j})G_{i,0}(P', Q) + \quad (45)$$

$$+ ((D_{i,0} - D_{i,j})\bar{\nabla}G_{i,0}(P', Q), \bar{n}_Q)] d\gamma'_{i,j} = \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{M_i} \int_{\gamma'_{i,j}} F_{\psi_{i,0}}(Q, s) G_{i,0}(P', Q) d\gamma'_{i,j}.$$

Таким образом, алгоритм решения исходной задачи (1) – (8) имеет вид:

*Шаг 1.* Определяем нормальное поле радона  $\tilde{A}_i(z, t)$ . Например, в горизонтально-слоистой кусочно-однородной среде с плоско-параллельными границами  $z = z_i = const, i = \overline{0, N-1}$ , коэффициентами диффузии  $d_i = d_{zz}^{i,0}, i = \overline{0, N}$  и скоростями адвекции  $\nu_{i,0}, i = \overline{0, N}$  по алгоритму, описанному в работе Р.И. Паровика<sup>2</sup>.

*Шаг 2.* Если границы слоев  $z = \gamma_{i,0}(x, y) = z_i = const$ , то есть среда имеет плоско-параллельные границы, то решение задачи (10) – (15) для нормального поля радона найдено:  $A_i(P, t) = \tilde{A}_i(z, t)$ . Иначе следует решить задачу (10) – (15), например, методом интегральных уравнений, формируя их по участкам  $\gamma_{i,0}(x, y) \neq z_i$ .

*Шаг 3.* Вычисляем функции  $\psi_{i,0}(P', t)$  на границах включений  $\gamma_{i,j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}$  по формуле (20).

*Шаг 4.* Для каждого из значений параметра  $s$  множества квадратурных узлов численного обращения преобразования Лапласа<sup>3</sup> по формуле (32):

*Шаг 4.1.* Находим образы  $F_{\psi_{i,0}}(P', s)$  функций  $\psi_{i,0}(P, t)$  при преобразовании (31).

*Шаг 4.2.* Находим решение задачи (40) – (43) для функции Грина. Оно может быть получено аналитически для случая однородных слоев с плоско-параллельными границами, например, с помощью интегрального преобразования Ханкеля.

*Шаг 4.3.* Формируем систему интегральных уравнений Фредгольма II рода (45) и находим ее решение – граничные значения функции  $F_{i,j}(Q, s)$ .

*Шаг 4.4.* По формуле (44) определяем решение задачи (33) – (39).

*Шаг 4.5.* Формируем слагаемое квадратурной формулы для интеграла (32), вычисляя функции  $u(P', t)$ .

*Шаг 5.* Находим аномальное поле  $\bar{A}_{i,j}(P, t)$  по формуле (24).

*Шаг 6.* Решение исходной задачи (1) – (8) – функцию  $A_{i,j}(P, t)$  – получаем по формуле (9).

В разделах 2.2, 2.3 приводятся алгоритмы решения вспомогательных задач определения функции нормального поля радона и функции Грина для случая кусочно-однородных сред, необходимых для нахождения искомой функции ОАР. В третьей главе приводится описание программного комплекса *DAR* (Diffusion and Advection of Radon), разработанного для реализации алгоритмов решения поставленной задачи, его процедур и параметров. В качестве средства разработки использован

<sup>2</sup>Паровик, Р.И. Модель нестационарной диффузии-адвекции радона в системе грунт-атмосфера // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2010. – №1(1). – С. 39-45.

<sup>3</sup>Матвеева, Т.А. Некоторые методы обращения преобразования Лапласа и их приложения: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07 / Матвеева Татьяна Александровна. – С.-П., 2003. – 117 с.

программный пакет – система компьютерной алгебры MAPLE, имеющая собственный встроенный язык программирования. Комплекс состоит из основной программы *DAR.mw* и процедур *INPUT.m*, *LAPLACE.m*, *FNORM.m*, *FGRIN.m*, *FANOM.m* и предназначен для расчета функции ОАР в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями. Структурная схема программного комплекса DAR представлена на рис. 2.

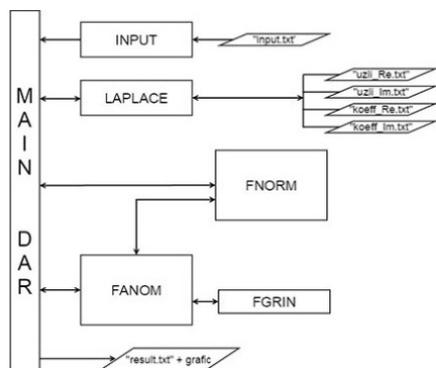


Рисунок 2 — Структурная схема программного комплекса DAR

Комплекс обладает следующими средствами и возможностями: задание параметров описания модели; нахождение функции нормального поля радона в кусочно-однородной горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами; вычисление функции Грина в горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами; определение функции аномального поля радона, учитывающей влияние одного или нескольких включений; графического отображения результатов расчетов.

**Четвертая глава** посвящена описанию результатов произведенных численных расчетов с помощью разработанного комплекса программ с целью проверки правильности модели и алгоритмов, анализа влияния физических и геометрических параметров сред на распределение поля радона.

В разделе 4.1 приводится сравнительное сопоставление результатов компьютерного моделирования в случае однородных горизонтально-слоистых сред с работами отечественных и зарубежных авторов: Р.И. Паровика<sup>2</sup>, В.С. Яковлевой<sup>4</sup> и А. Varchegy<sup>5</sup>. При этом максимальная относительная погрешность рассчитанных значений объемной активности радона не превышает 4%.

Так, в соответствии с работой<sup>4</sup>, проведен вычислительный эксперимент с диффузионно-адвективной моделью переноса радона для пятислойной горизонтально-слоистой среды с плоско-параллельными границами со следующими значениями ее параметров:  $n = 5$ ;  $\lambda = 2.1 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$ ;  $z_0 = 0 \text{ м}$ ,  $z_1 = 1 \text{ м}$ ,  $z_2 = 3 \text{ м}$ ,  $z_3 = 6 \text{ м}$ ;  $d_{0.0} = 1 \cdot 10^5 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $d_{1.0} = d_{2.0} = d_{3.0} = d_{4.0} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $v_{0.0} = 0 \text{ м/с}$ ,  $v_{1.0} = v_{2.0} = v_{3.0} = v_{4.0} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}$ ;  $\rho_{1.s} = \rho_{2.s} = \rho_{3.s} = \rho_{4.s} = 2700 \text{ кг/м}^3$ ;  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 0.45$ ;  $K_{1.em} = K_{2.em} = K_{3.em} = K_{4.em} = 0.2$ ;  $A_{1.Ra} = 90 \text{ Бк/кг}$ ,  $A_{2.Ra} = 4 \text{ Бк/кг}$ ,  $A_{3.Ra} = 30 \text{ Бк/кг}$ ,  $A_{4.Ra} = 1000 \text{ Бк/кг}$ .

Сравнительный анализ результатов на вертикальном профиле  $(2, 2, z)$ ,  $z \in [0, 10]$ , соответствующих моменту времени  $t = 10^6 \text{ с}$ , приведен в табл. 1, где:  $z$  – глубина, м;  $A_{gr}$  – значения ОАР<sup>4</sup>, кБк/м<sup>3</sup>;  $A_{num}$  – значения ОАР, найденные по разработанным алгоритмам, кБк/м<sup>3</sup>;  $\Delta$  – абсолютная погрешность, %;  $\delta$  – относительная погрешность, %. Данные табл. 1 показывают, что максимальная относительная погрешность не превосходит 4%.

На рис. 3 показана динамика распределения ОАР в различные моменты времени  $t$ :  $10^5 \text{ с}$ ;  $2 \cdot 10^5 \text{ с}$ ;  $3 \cdot 10^5 \text{ с}$ ;  $10^6 \text{ с}$ .

<sup>4</sup>Яковлева, В.С. Численное решение уравнения диффузии-адвекции радона в многослойных геологических средах / В.С. Яковлева, Р.И. Паровик // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2011. – №1(2). – С. 45-55.

<sup>5</sup>Varchegy, A. Radon migration model for covering U mine and ore processing tailings / A. Varchegy, J. Somlai, and Z. Sas // Romanian Journal of Physics. – 2013. – Vol.58. – pp. 298-310.

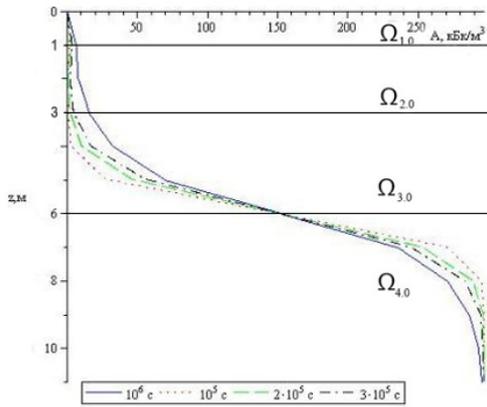


Рисунок 3 – Кривые распределения ОАР в различные моменты времени  $t$

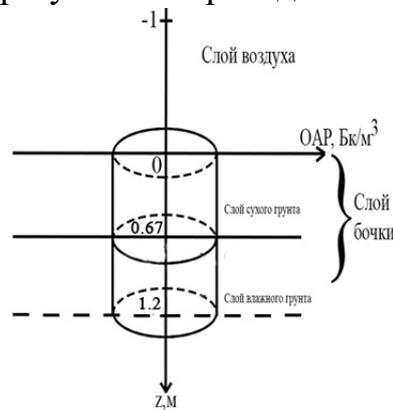
Таблица 1 – Сравнительный анализ результатов для  $t = 10^6$  с

$z$ , м	$A_{gr}$ , кБк/м <sup>3</sup>	$A_{итт}$ , кБк/м <sup>3</sup>	$\Delta$ , %	$\delta$ , %
1	2	3	4	5
0	0.0000	0.0001	0.01	–
1	2.3629	2.2798	8.31	3.52
2	0.4401	0.4465	0.64	1.45
3	0.9790	0.9736	0.54	0.55
4	2.8929	2.8628	3.01	1.04
5	27.6425	27.3560	28.65	1.04
6	149.4550	149.3438	11.12	0.07
7	271.0907	271.3304	23.97	0.09
8	295.2742	295.7716	49.74	0.17
9	297.1825	296.9868	19.57	0.07
10	297.2752	297.0000	27.52	0.09

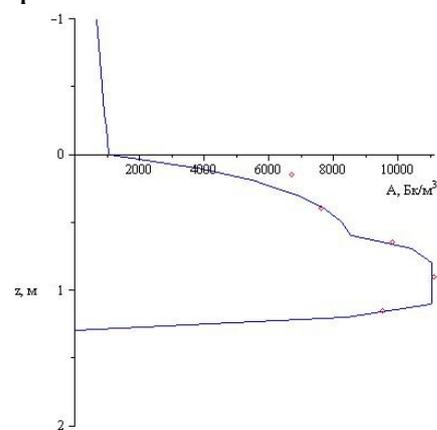
В разделе 4.2 представлено сравнение с данными натурального эксперимента, проведенного сотрудниками лаборатории геодинамики ИГф УрО РАН<sup>6</sup>.

Расчетная модель представлена на рис. 4 (а). Значения ее параметров следующие:  $n = 4$ ;  $t = 2419200$  с (28 дней);  $\lambda = 2.1 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$ ;  $z_0 = 0$  м,  $z_1 = 0.67$  м,  $z_2 = 1.2$  м;  $d_{0,0} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $d_{1,0} = 1.5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $d_{2,0} = 1 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $d_{3,0} = 1 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $v_{0,0} = v_{1,0} = v_{2,0} = v_{3,0} = 0$  м/с;  $\rho_{1,s} = \rho_{2,s} = 1500$  кг/м<sup>3</sup>;  $\eta_1 = 0.2$ ,  $\eta_2 = 0.1$ ;  $K_{1,em} = K_{2,em} = 0.15$ ;  $A_{1,Ra} = A_{2,Ra} = 55$  Бк/кг.

Результаты численного моделирования приведены на рис. 4 (б). Точками на графике отмечены результаты проведенных измерений.



а) расчетная модель



б) график функции ОАР

Рисунок 4 – Результаты натурального эксперимента

Натурные эксперименты показали адекватность и достоверность предложенных модели и метода решения задачи для случая кусочно-однородных сред.

В разделе 4.3 рассматривается влияние однородного и анизотропного включений, и обсуждаются результаты вычислительных экспериментов по взаимному влиянию параметров построенной математической модели.

Проведены численные расчеты функции распределения ОАР в кусочно-однородной плоско-параллельной горизонтально-слоистой среде с шаро-

<sup>6</sup>Юрков, А.К. К вопросу применения радоновых исследований при изучении неглубоко залегающих карстовых полостей / А.К. Юрков, И.А. Козлова, А.Н. Антипин // Глубинное строение, геодинамика, тепловое поле Земли, интерпретация геофизических полей. Восьмые научные чтения памяти Ю.П. Булашевича. Материалы конференции. – 2015. – С. 383-385.

образным включением  $\Omega_{4.1}$  радиуса  $R = 0.5$  м с центром в точке  $(1, 1, 7)$  (рис. 5). Значения параметров среды представлены в разделе 4.1.

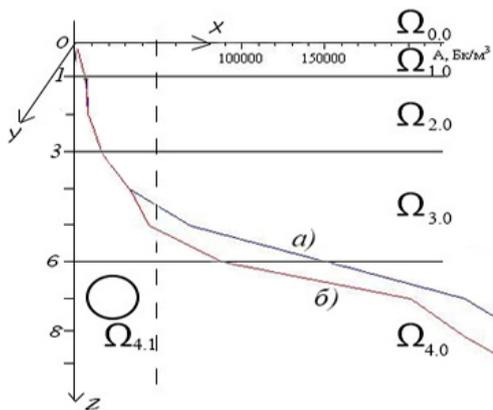


Рисунок 5 – График функции ОАР

Физические свойства включения заданы симметричным тензором диффузии  $D_{4.1} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 3 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$  и скоростью адвекции  $v_{4.1} = 4 \cdot 10^{-5}$  м/с.

Результаты численного моделирования по вертикальному профилю  $(2, 2, z), z \in [0, 11]$  приведены на рис. 5. На рис. 5 (а) изображен график функции нормального поля радона при  $t = 10^6$  с. Влияние включения отражено на рис. 5 (б).

Для среды, геометрия которой представлена на рис. 5, показана зависимость ОАР от радиуса  $R$  шарообразного включения  $\Omega_{4.1}$ :  $R = 0.5$  м и  $R = 1.5$  м с центром в точке  $(1, 1, 8)$  (рис. 6).

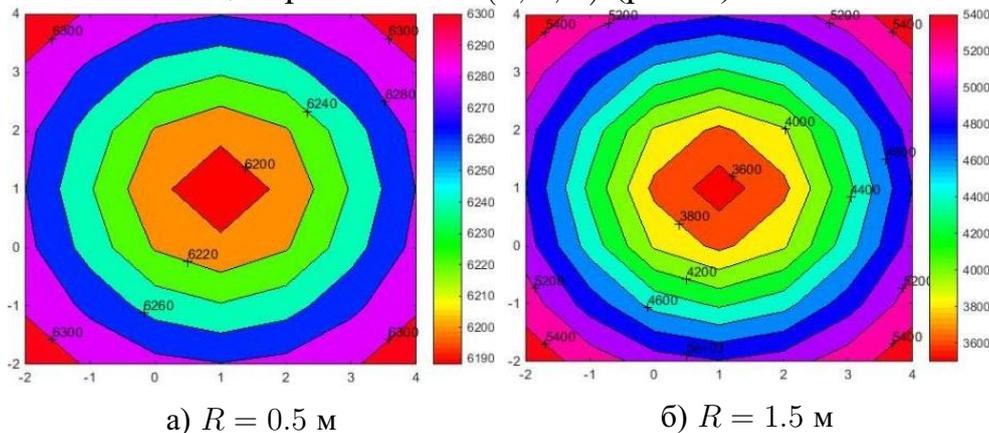


Рисунок 6 – Зависимость объемной активности радона от радиуса включения

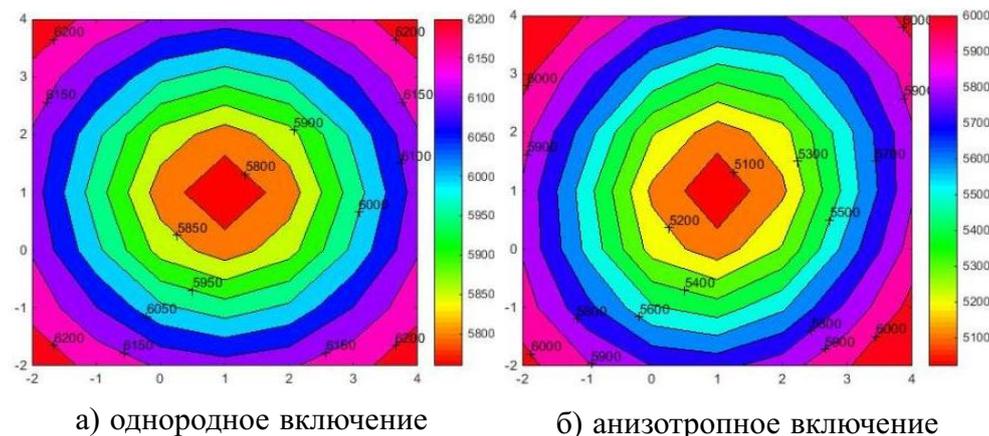


Рисунок 7 – График поверхности в изолиниях функции ОАР

На рис. 7 (а) построен график поверхности искомой функции ОАР в изолиниях, в прямоугольнике  $x, y \in [-2; 4]$ , в плоскости  $z = 1$  м. В случае анизотропного шарообразного включения  $\Omega_{4.1}$ , диффузионные свойства которого описываются тензором

$D_{4.1} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 10^{-5} & 10^{-5} & 0 \\ 10^{-5} & 5 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$ , график поверхности искомой функции ОАР в изолиниях имеет вид (рис. 7 (б)).

Учет анизотропии при моделировании процессов переноса радона приводит к существенному изменению поля объемной активности радона и является значимым фактором, необходимым при описании математической модели поля в реальных геологических средах.

**В заключении** приведены основные результаты работы, выносимые на защиту:

*В рамках развития качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей получены:*

1. Математическая модель трехмерной задачи диффузии-адвекции в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями, учитывающая анизотропию диффузионных свойств подобластей среды.

2. Формулы интегрального представления решения поставленной задачи.

3. Аналитические формулы представления решения задач для функции нормального поля радона и функции Грина для случая горизонтально-слоистого плоско-параллельного пространства.

*В рамках разработки, обоснования и тестирования эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий получены:*

1. Алгоритм нахождения функции нормального поля радона в кусочно-однородной горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами.

2. Алгоритм вычисления функции Грина в горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами.

3. Алгоритм определения функции аномального поля радона, учитывающей влияние включений.

*В рамках реализации эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов получены:*

1. Комплекс программ, имеющий следующую модульную структуру:

– программный модуль, реализующий алгоритм нахождения функции нормального поля радона в кусочно-однородной горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами;

– программный модуль, реализующий алгоритм вычисления функции Грина в горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами;

– программный модуль, реализующий алгоритм обращения интегрального преобразования Лапласа.

Проведены сравнения с известными моделями и натурными экспериментами для случая однородных кусочно-постоянных сред и вычислительные эксперименты по исследованию процессов диффузии-адвекции радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями и взаимному влиянию параметров математической модели.

## **Публикации автора по теме диссертации**

*Публикации в российских рецензируемых научных изданиях и журналах, рекомендованных ВАК Министерства образования и науки РФ:*

1. Кризский, В.Н. О вычислении температурных и диффузионных полей в кусочно-постоянных анизотропных средах / В.Н. Кризский, А.Р. Бикбаева // Вестник Башкирского университета. – 2013. – Т.18, №2. – С. 313-316.

2. Кризский, В.Н. Математическое моделирование процессов диффузии-адвекции радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями / В.Н. Кризский, А.Р. Нафикова // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т.7, №2. – С. 38-45. (Scopus)

*Свидетельства о регистрации программ:*

3. Нафикова, А.Р. Электронный ресурс «Программный модуль "Функция нормального поля радона"» / А.Р. Нафикова, В.Н. Кризский. – М.: ФГНУ ИНИПИ РАО, ОФЭРНиО № 20598 от 04.12.2014.

4. Нафикова, А.Р. Электронный ресурс «Программный модуль "Функция Грина"» / А.Р. Нафикова, В.Н. Кризский. – М.: ФГНУ ИНИПИ РАО, ОФЭРНиО № 20600 от 04.12.2014.

*Другие научные статьи и тезисы докладов:*

5. Бикбаева, А.Р. Программный модуль «Численное обращение преобразования Лапласа» / А.Р. Бикбаева, В.Н. Кризский // Материалы Межвуз. науч.-практ. конф. по прикладной мат., Стерлитамак, 3-4 апреля 2012 г. – С. 63-64.

6. Бикбаева, А.Р. О вычислении температурных и диффузионных полей в кусочно-анизотропных средах / А.Р. Бикбаева, В.Н. Кризский // Тез. докл. Междунар. науч.-практ. конф. «Измерения: состояние, перспективы, развитие», Челябинск, 25-27 сентября 2012 г.: в 2 т. – Т.1. – С. 48-50.

7. Бикбаева, А.Р. Способ вычисления температурных и диффузионных полей в кусочно-анизотропных средах / А.Р. Бикбаева // Тез. докл. Междунар. шк.-конф. для студентов, аспирантов и молодых уч. «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании», Уфа, 14-18 октября 2012 г. – С. 253.

8. Бикбаева, А.Р. Способ вычисления температурных и диффузионных полей в кусочно-анизотропных средах / А.Р. Бикбаева // Сб. тр. Междунар. шк.-конф. для студентов, аспирантов и молодых уч. «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании», Уфа, 14-18 октября 2012 г.: – Т.1. – С. 35-42.

9. Бикбаева, А.Р. Решение задачи нестационарной диффузии-адвекции радона в кусочно-анизотропных слоистых средах с включениями / А.Р. Бикбаева, В.Н. Кризский // Тез. Всерос. молодежной науч.-практ. конф. «Актуальные вопросы науки и образования», Уфа, 25-27 апреля 2013 г. – С. 96.

10. Бикбаева, А.Р. Решение задачи нестационарной диффузии-адвекции радона в кусочно-анизотропных средах с включениями / А.Р. Бикбаева, В.Н. Кризский // Материалы Всерос. науч.-практ. конф. «Современные проблемы науки и образования в техническом вузе», Стерлитамак, 24-26 июня 2013 г. – Т.2. – С. 4-8.

11. Бикбаева, А.Р. Решение задачи нестационарной диффузии-адвекции радона в кусочно-анизотропных средах / А.Р. Бикбаева, В.Н. Кризский // Тр. Междунар. науч. конф. «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы», Стерлитамак, 26-30 июня 2013 г.: в 2 т. – Т.2. – С. 187-192.

12. Бикбаева, А.Р. О способе решения задачи нестационарной диффузии радона в кусочно-анизотропных средах / А.Р. Бикбаева, В.Н. Кризский // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. – Т.15, №2. – С. 8-11.

13. Нафикова, А.Р. Математическое моделирование процессов диффузии-адвекции радона в кусочно-анизотропных слоистых средах с включениями / А.Р. На-

фикова, В.Н. Кризский // Сб. тр. II Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием «Математическое моделирование процессов и систем», Стерлитамак, 28-29 ноября 2013 г. – С. 86-91.

14. Нафикова, А.Р. О способе решения задачи диффузии-адвекции радона в кусочно-анизотропных слоистых средах с включениями / А.Р. Нафикова // Сб. докл. XV Уральской молодежной науч. шк. по геофизике, Екатеринбург, 24-29 марта 2014 г. – С. 166-168.

15. Кризский, В.Н. О решении прямых и граничных обратных задач математической физики в кусочно-анизотропных квазифрактальных средах / В.Н. Кризский, А.Р. Нафикова, Р.Р. Яматов // Тез. докл. Всерос. конф. с междунар. участием, посвящ. памяти В.К. Иванова «Алгоритмический анализ неустойчивых задач», Челябинск, 10-14 ноября 2014 г. – С. 127-128.

16. Нафикова, А.Р. Вычисление функции Грина для задачи диффузии-адвекции радона в горизонтально-слоистой среде / А.Р. Нафикова, В.Н. Кризский // Материалы III Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием «Математическое моделирование процессов и систем», Стерлитамак, 4-6 декабря 2014 г. – С. 43-49.

17. Нафикова, А.Р. О решении задачи теплопроводности и диффузии в кусочно-постоянных анизотропных средах / А.Р. Нафикова, В.Н. Кризский // Материалы 42-й сессии Междунар. науч. семинара им. Д.Г. Успенского «Вопросы теории и практики геологической интерпретации геофизических полей», Пермь, 26-30 января 2015 г. – С. 153-155.

18. Нафикова, А.Р. К задаче диффузии-адвекции радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями / А.Р. Нафикова // Сб. науч. материалов XVI Уральской молодежной науч. шк. по геофизике, Пермь, 16-20 марта 2015 г. – С. 231-235.

19. Нафикова, А.Р. Программный комплекс исследования процессов диффузии-адвекции радона в кусочно-анизотропных слоистых средах с включениями / А.Р. Нафикова // Сб. материалов II Всерос. науч.-метод. конф. «Современные проблемы геометрии и ее приложений», Стерлитамак, 28-29 марта 2015 г. – С. 182-186.

Подписано в печать 19.10.2015. Усл.печ.л. 1,0  
Формат 60 × 84<sub>1/16</sub>. Тираж 110 экз. Заказ №417

Редакционно-издательский отдел Стерлитамакского филиала БашГУ:  
453103, Стерлитамак, пр. Ленина, 49.