

На правах рукописи



ЛУТ АЛЕКСАНДР ВАЛЕРЬЕВИЧ

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ
ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРА ВНЕШНЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ
ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА
МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
УПРУГОСТИ, АКУСТИКИ И ГИДРОДИНАМИКИ**

**1.2.2. Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ**

**2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации,
статистика**

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

ЧЕЛЯБИНСК – 2022

Работа выполнена в ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор
Замышляева Алена Александровна

Официальные оппоненты:

Чистяков Виктор Филимонович,
доктор физико-математических наук,
ФГБУН «Институт динамики систем и теории
управления им. В.М. Матросова» СО РАН,
лаборатория системного анализа и вычислительных
методов, главный научный сотрудник

Кризский Владимир Николаевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский горный университет»,
кафедра информатики и компьютерных технологий,
профессор

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»

Защита состоится 12 сентября 2022 года, в 14 ч. 00 мин., на заседании диссертационного совета 24.2.437.05 (Д 212.298.14), созданного на базе Южно-Уральского государственного университета, по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, ауд. 1007.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)» и на сайте:

<https://www.susu.ru/ru/dissertation/24243705-d-21229814/lut-aleksandr-valerevich>

Автореферат разослан «___» июля 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук, доцент



Н.А. Манакова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Большое число теоретических и прикладных работ, связанных с обработкой и анализом информации для изучения процессов упругости, акустики и гидродинамики, посвящены построению и использованию алгоритмов и методов математического моделирования. Системный анализ и математическое моделирование позволяют изучить объекты тогда, когда натурные эксперименты либо ресурсозатратны, либо небезопасны, либо невозможны. При этом в большинстве работ, как правило, изучается сам процесс или явление, но зачастую этого недостаточно, и требуется восстановление параметра, а иногда и несколько параметров, характеризующих объект исследования, например, можно определить допустимую нагрузку на объект исследования или ее влияние на поведение объекта в дальнейшем при различных условиях.

Диссертационная работа посвящена разработке численно-аналитических методов и алгоритмов восстановления параметра внешнего воздействия для следующих математических моделей.

1. Математическая модель Буссинеска – Лява. В цилиндре $\Omega \times [0; T]$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, рассмотрим следующую задачу:

$$(\lambda - \Delta)v_{tt} = \alpha(\Delta - \lambda')v_t + \beta(\Delta - \lambda'')v + qf, \quad (1)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad (2)$$

$$v(x, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3)$$

$$\int_{\Omega} v(x, t)K(x)dx = \Phi(t). \quad (4)$$

Данная математическая модель в зависимости от области Ω может описывать различные процессы и явления: процессы распространения волн на мелководье, продольные колебания в тонком упругом стержне при внешней нагрузке с учетом инерции и некоторые другие физические процессы. Обратной задачей для математической модели Буссинеска – Лява назовем задачу отыскания пары функций $q(t)$ и $v(x, t)$ из (1)–(4). Искомые функции $q(t)$ и $v(x, t)$ описывают коэффициент внешнего воздействия и происходящий процесс в данной среде, соответственно. Коэффициенты $\alpha, \beta, \lambda, \lambda', \lambda''$ уравнения (1) задают параметры исследуемой среды. Условия (2) и (3) задают начальные и граничные значения. Условие переопределения (4) задает некоторое усреднение функции $v(x, t)$ на всей рассматриваемой области Ω с весом $K(x)$.

2. Математическая модель продольных колебаний в конструкции из стержней. Пусть дан конечный связный ориентированный граф $G = G(\mathfrak{D}, \mathfrak{E})$, где $\mathfrak{D} = \{V_i\}$ – множество вершин и $\mathfrak{E} = \{E_j\}$ – множество ребер. Заданы $l_j, d_j \in \mathbb{R}_+$ – длина и площадь поперечного сечения ребра E_j , соответственно. Рассмотрим следующую задачу:

$$(\alpha - \Delta)v_{tt} = \beta(\Delta - \gamma)v + qf, \quad v = (v_1, v_2, \dots, v_j, \dots), \quad (5)$$

$$\sum_{j:E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j v_{jx}(0, t) - \sum_{m:E_m \in E^\omega(V_i)} d_m v_{mx}(l_m, t) = 0, \quad (6)$$

$$v_j(0, t) = v_k(0, t) = v_m(l_m, t) = v_n(l_n, t), \quad (7)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad (8)$$

$$\langle v(x, t), K(x) \rangle = \Phi(t), \quad (9)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $L_2(G) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_2(0, l_j)\}$, а через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине V_i . Данная математическая модель описывает продольные колебания в конструкции из тонких упругих стержней, представленной в виде графа G , при внешней нагрузке. Обратной задачей для математической модели продольных колебаний в конструкции из стержней называется задача отыскания пары функции $v(x, t)$ и $q(t)$ из (5)–(9). Искомые функции $q(t)$ и $v_j(x, t)$ описывают внешнее воздействие на элементы конструкции и продольные колебания в точке x в момент времени t на j -ом элементе конструкции, соответственно. Коэффициенты α, β, γ уравнения (5) задают параметры, описывающие свойства материала, из которого сделаны элементы конструкции. Условия (6) и (7) задают баланс потока и непрерывность решения в каждой вершине графа, соответственно. Условие (8) задает начальное положение и начальную скорость продольных колебаний в каждом элементе конструкции. Условие переопределения (9) задает некоторое усреднение вектор-функции $v(x, t)$ на всем графе G .

3. Математическая модель ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле. В цилиндре $\Omega \times [0; T]$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, рассмотрим задачу:

$$(\Delta - \alpha)v_{ttt} + \beta(\Delta - \gamma)v_{tt} + \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} + qf = 0, \quad (10)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad (11)$$

$$v_{tt}(x, 0) = v_2(x), \quad v_{ttt}(x, 0) = v_3(x), \quad x \in \Omega,$$

$$v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \quad (12)$$

$$\int_{\Omega} v(x, t) K(x) dx = \Phi(t). \quad (13)$$

Данная математическая модель описывает ионно-звуковые волны в плазме во внешнем магнитном поле. Обратной задачей для математической модели ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле назовем задачу отыскания функций $q(t)$ и $v(x, t)$ из (10)–(13). Искомые функции $q(t)$ и $v(x, t)$ описывают воздействие внешнего магнитного поля и обобщенный потенциал электрического поля, соответственно. Коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \kappa$ уравнения (10) связывают такие величины, как радиус Дебая, ионную гирочастоту и частоту Ленгмюра. Условия (11) и (12) задают начальные и граничные значения для нахождения обобщенного потенциала электрического поля.

Исследуемые в работе математические модели редуцируются к обратной задаче для уравнения соболевского типа высокого порядка с условием Коши:

$$Av^{(n)}(t) = B_{n-1}v^{(n-1)}(t) + \dots + B_1v'(t) + B_0v(t) + \chi(t)q(t) + f(t), \quad t \in [0, T] \quad (14)$$

$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = v_1, \quad \dots, \quad v^{(n-1)}(0) = v_{n-1}, \quad (15)$$

$$Cv(t) = \Psi(t), \quad (16)$$

где операторы $A, B_0, B_1, \dots, B_{n-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, то есть линейные и непрерывные операторы, определенные на \mathcal{U} и действующие в \mathcal{F} , $\ker A \neq \{0\}$, $C \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$, $\chi : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{F})$, заданы функции $f : [0, T] \rightarrow \mathcal{F}$, $\Psi : [0, T] \rightarrow \mathcal{Y}$, а $\mathcal{U}, \mathcal{F}, \mathcal{Y}$ – банаховы пространства. Обратная задача заключается в отыскании из уравнений (14)–(16) пары функций $v(t) \in C^n([0, T]; \mathcal{U})$ и $q(t) \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$.

Впервые изучаемые модели были представлены в работах Д. Буссинеска, А. Лява, А. Г. Свешникова, А. Б. Альшина, М. О. Корпусова и Ю. Д. Плетнера. В дальнейшем стали проводиться исследования «прямых» задач с различными начальными и граничными условиями, а исследование обратных задач для данных моделей ранее не проводилось. Обратные задачи рассматривались для невырожденных абстрактных дифференциальных уравнений в работах А. И. Прилепко и Д. Г. Орловского и для уравнений соболевского типа первого порядка А. В. Уразаевой, Н. Д. Ивановой и А. А. Баязитовой. Обратные задачи изучались и другими авторами, например, Н. Ф. Валеевым, В. А. Юрко, А. А. Касымалиевой, для математических моделей, отличных от рассматриваемых в данной диссертационной работе, с различными условиями переопределения. Представленная диссертационная работа опирается на результаты исследований уравнений соболевского типа, разработанные Г. А. Свиридюком и его учениками, в частности, А. А. Замышляевой об исследовании уравнений соболевского типа и математических моделей высокого порядка.

Стоит также выделить работы, в которых проводились исследования, схожие с данной диссертационной работой. Например, В. Е. Федоров, А. В. Уразаева и Н. Д. Иванова изучали обратную задачу по восстановлению коэффициента $q(t)$ для уравнения соболевского типа первого порядка. С. Н. Шергин рассматривал обратные задачи для математических моделей первого и второго порядка, но без возможности вырожденности оператора A . Рассматриваемые в работе обратные задачи для трех математических моделей ранее не исследовались.

Таким образом, диссертационная работа направлена на решение актуальной научной задачи по разработке новых аналитических, численных методов и алгоритмов исследования обратных задач для математической модели Буссинеска – Лява, продольных колебаний в конструкции из стержней и ионно-звуковых волн в плазме, которая позволит определить не только состояние системы, но и параметр внешнего воздействия для предотвращения процессов абразии на прибрежные мелководные районы, для генерации и улучшения сигналов в акустических преобразователях, а также для укрепления опорных конструкций сооружений.

Целью диссертационной работы является разработка аналитических и численных методов исследования обратных задач для математических моделей Буссинеска – Лява, продольных колебаний в конструкции из стержней и ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле, включающая обработку информации по восстановлению параметров внешнего воздействия, с построением алгоритмов и реализацией комплекса программ. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**.

1. Провести структурный системный анализ предметной области обратных задач для математического моделирования с применением информационно-логического метода.

2. Разработать и применить аналитические методы исследования математических моделей Буссинеска – Лява, продольных колебаний в конструкции из стержней и ионно-звуковых волн в плазме, включающего нахождение решения и восстановление параметра внешнего воздействия.

3. Разработать численные методы по нахождению приближенного решения, включающего восстановление параметра внешнего воздействия, для математических моделей Буссинеска – Лява, продольных колебаний в конструкции из стержней и ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле.

4. Создать комплекс программ по нахождению приближенного решения, включающего восстановление параметра внешнего воздействия для математических моделей Буссинеска – Лява, продольных колебаний в конструкции из стержней и по обработке информации для математической модели ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле.

5. Провести вычислительные эксперименты с обработкой информации для нахождения приближенного решения, включающего восстановление параметра внешнего воздействия, для математических моделей Буссинеска – Лява в стержне, продольных колебаний в конструкции из стержней и ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле.

6. Верифицировать, полученные в разработанных комплексах программ, результаты обработки информации, восстанавливающей параметр внешнего воздействия методами имитационного моделирования.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

В области математического моделирования: получены новые аналитические методы исследования обратной задачи для математических моделей Буссинеска – Лява, продольных колебаний в конструкции из стержней, ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле.

В области численных методов: разработаны новые алгоритмы численных методов нахождения приближенного решения обратных задач для математических моделей Буссинеска – Лява, продольных колебаний в конструкции из стержней и ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле.

В области комплексов программ: разработаны комплексы программ по нахождению приближенного решения, включающего восстановление параметра внешнего воздействия, для математических моделей Буссинеска – Лява в стержне, продольных колебаний в конструкции из стержней, по нахождению потенциала электрического поля и восстановления потенциала магнитного поля в математической модели ионно-звуковых волн в плазме.

В области системного анализа: построена информационно-логическая модель исследования обратных задач для математических моделей высокого порядка с целью проектирования исследования, формализации задач и представления о проблематике исследования; проведена обработка информации по восстановлению параметров внешнего воздействия на основе вычислительных экспериментов по восстановлению параметра уравнения для трех исследуемых математических моделей.

Теоретическая и практическая значимость. Данное исследование дополнит уже имеющиеся *теоретические* результаты исследованием вопросов однозначной разрешимости обратных задач для трех математических моделей, построением новых конструктивных схем и алгоритмов, используемых для нахождения приближенного решения обратных задач в теории уравнений соболевского типа высокого порядка и относительно полиномиально ограниченных пучков операторов. *Практическая значимость* диссертационной работы обусловлена применением полученных результатов для решения практических задач. Например, исследование обратной задачи для математической модели Буссинеска – Лява, в двумерном случае, поможет избежать негативных последствий размывания прибрежных мелководных портов. Конструкциями, описываемыми второй математической моделью, могут быть волноводы, которые часто используются для генерации, передачи и усиления механических колебаний, например, в акустических преобразователях, а также фермы – несущие конструкции сооружений, механизмов и машин, состоящие из стержней. Результаты изучения ионно-звуковых волн, порождаемых объектами, которые движутся в околоземной космической плазме, позволит проводить мониторинг их местоположения.

Методология и методы исследования. основополагающими в работе являются методы математического моделирования и системного анализа. Методы системного анализа и построенная информационно-логическая модель позволили определить объекты исследования, выбрать используемые методы и алгоритмы для формализации задач и представления о проблематике исследования. Методы математического моделирования позволили изучить процессы продольных колебаний в стержне и конструкции из них, распространения ионно-звуковых волн в плазме, а также восстановить параметры внешнего воздействия на эти процессы. Кроме этого, в работе используются методы относительной полиномиальной ограниченности пучков и метод фазового пространства, а для восстановления па-

раметра, отвечающего за внешнее воздействие $q(t)$, был использован метод последовательных приближений.

Положения, выносимые на защиту. Согласно специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ на защиту выносятся:

– *в рамках развития качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей* : аналитические методы исследования обратной задачи для математических моделей Буссинеска – Лява [1,3], продольных колебаний в конструкции из стержней [5], ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле [7];

– *в рамках разработки, обоснования и тестирования эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий* : алгоритмы численных методов для нахождения приближенного решения и восстановления параметра внешнего воздействия для математических моделей Буссинеска – Лява [1, 4], продольных колебаний в конструкции из стержней [6], ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле [8] с проведением вычислительных экспериментов и определением точности нахождения приближенного решения;

– *в рамках реализации эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента* : программа для моделирования продольных колебаний в элементах конструкции из тонких упругих стержней [9] и программные комплексы для моделирования продольных колебаний в тонком упругом стержне с возможностью восстановления внешней нагрузки на стержень [10], для моделирования продольных колебаний в элементах конструкций из двух тонких упругих стержней с восстановлением коэффициента внешней нагрузки [11].

Согласно специальности 2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика на защиту выносятся:

– *в рамках формализации и постановки задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации* : информационно-логическая модель предметной области исследования обратных задач для математических моделей соболевского типа высокого порядка;

– *в рамках разработки специального математического и программного обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации* : программа для обработки информации при моделировании ионно-звуковых волн в плазме с восстановлением параметра воздействия внешнего магнитного поля [12].

Степень достоверности. Результаты, представленные в работе, подтверждаются строгими математическими доказательствами, согласованностью всех проводимых вычислительных экспериментов, корректным использованием методов

математического моделирования, а также согласованы и не противоречат исследованиям, проводимым другими авторами. Выносимые на защиту результаты были опубликованы и получены автором, также имеют окончательный и исчерпывающий характер.

Апробация результатов. По всем результатам работы были представлены доклады на различных конференциях и семинарах: ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)», г. Челябинск, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет», г. Уфа, НИУ «Высшая школа экономики», г. Нижний Новгород. Кроме того, результаты работы включены в список основных научных и научно-технических разработок ФГАОУ ВО «ЮУрГУ (НИУ)» 2020 и 2021 года.

Личный вклад автора. В диссертацию включены только опубликованные и полученные лично А. В. Лутом результаты. Они не затрагивают интересы соавторов в представленных публикациях. Научному руководителю А. А. Замышляевой принадлежит общая постановка задачи исследования.

Публикации. Результаты диссертационного исследования представлены в двенадцати научных изданиях: шесть из которых входят в перечень ВАК [1, 2, 4–6, 8]; три содержатся в системах цитирования Web of Science [1, 2, 7]; пять индексируются в Scopus [1–3, 5, 7]. Кроме этого, получены четыре свидетельства о регистрации программ для ЭВМ [9–12].

Структура и объем работы. Диссертационная работа, помимо введения, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка литературы и четырех приложений, содержит четыре главы. Объем диссертации составляет 168 страниц без учета приложений. Список литературы содержит 125 наименований.

Финансовая поддержка. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90137.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы исследования, представлена постановка изучаемых обратных задач, указана степень разработанности, поставлена цель и соответствующие ей задачи, приведена научная новизна, показана теоретическая и практическая значимость, указаны методология и методы исследования, сформулированы положения, выносимые на защиту, приведена степень достоверности и апробация результатов диссертационной работы.

Первая глава состоит из пяти параграфов. В *первом параграфе* приведен системный анализ предметной области исследования обратных задач с применением метода информационно-логического моделирования, который отображает данные предметной области в виде совокупности информационных объектов и связей между ними. Данный метод позволил определить объекты исследования, выбрать используемые методы и алгоритмы для формализации задач и представления о проблематике исследования. Для каждого элемента общей информационно-

логической схемы приведена его подробная декомпозиция. *Второй параграф* содержит вспомогательные аналитические методы исследования математических моделей на основе теории уравнений соболевского типа. В *третьем, четвертом и пятом параграфах* содержатся, соответственно, выводы математических моделей Буссинеска – Лява (1)–(4), продольных колебаний в конструкции из стержней (5)–(9) и ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле (10)–(13) из физических законов с представлением их разрешимости.

Во **второй** главе, состоящей из шести параграфов, приведены все этапы исследования обратной задачи для математической модели Буссинеска – Лява (1)–(4). В *первом параграфе* доказана теорема об однозначной разрешимости обратной задачи для полного уравнения соболевского типа второго порядка на основе теории относительно полиномиально ограниченных пучков операторов. Во *втором параграфе* проведена редукция математической модели Буссинеска – Лява (1)–(4) с применением полученных в предыдущем параграфе результатов.

Теорема 1. (2.2.1)¹ Пусть выполняется одно из условий $\lambda \notin \sigma(\Delta)$ или $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda = \lambda') \wedge (\lambda \neq \lambda'')$. $K, u_0, u_1 \in \mathcal{U}^1, f \in C^2([0, T]; \mathcal{F}), \Phi \in C^4([0, T]; \mathcal{Y}), \sum_{\lambda \neq \lambda_k} \frac{\langle f(\cdot, t), K \rangle}{\lambda - \lambda_k} \neq 0$. Кроме этого, выполнено условие согласования $\int_{\Omega} v_1(x) K(x) dx = \Phi'(0)$, при некотором начальном значении $v_1 \in \mathcal{U}^1$, а начальные значения $w_k = (\mathbb{I} - P)v_k \in \mathcal{U}^0$ удовлетворяют

$$\langle v_0 + \frac{q(0)f(\cdot, 0)}{\beta(\lambda_k - \lambda'')}, \mathbb{X}_k \rangle = 0, \langle v_1 + \frac{q(0)f_t(\cdot, 0) + q'(0)f(\cdot, 0)}{\beta(\lambda_k - \lambda'')}, \mathbb{X}_k \rangle = 0 \text{ для } k : \lambda_k = \lambda.$$

Тогда существует единственное решение (v, q) задачи (1)–(4), причем $q \in C^2([0, T]; \mathcal{Y}), v = u + w$, где $u \in C^2([0, T]; \mathcal{U}^1)$ – решение регулярной, а $w \in C^2([0, T]; \mathcal{U}^0)$ – решение сингулярной задачи, которое представимо в виде

$$w(x, t) = - \sum_{\lambda = \lambda_k} \left\langle \frac{q(t)f(\cdot, t)}{\beta(\lambda_k - \lambda'')}, \mathbb{X}_k \right\rangle \mathbb{X}_k. \quad (17)$$

Здесь λ_k – множество собственных значений, \mathbb{X}_k – множество соответствующих собственных функций, $\mathcal{U}^0 = \ker P, \mathcal{U}^1 = \text{im } P, \mathcal{F}^0 = \ker Q, \text{ а } \mathcal{F}^1 = \text{im } Q$. В *третьем параграфе* представлен алгоритм численного исследования обратной задачи для математической модели Буссинеска – Лява (1)–(4):

- 1) нахождение решения вспомогательной задачи Штурма – Лиувилля;
- 2) составление выражения $q_i(t)$ для проведения последовательных приближений функции $q(t)$, где $i = 0, 1, \dots$ означает i -й шаг приближения;
- 3) задание начального приближения $q_0(t) = 0$, по которому вычисляется первое приближение $q_1(t)$. Вычисление последовательных приближений функции $q(t)$ продолжается до тех пор пока норма разности двух приближений $\|q_{i+1}(t) - q_i(t)\|_{L_2(\Omega)} > \varepsilon$;
- 4) представление решения регулярной задачи $u(x, t)$ в виде галеркинской суммы. Аппроксимация начальных функций $v_0(x)$ и $v_1(x)$. Нахождение решения $u(x, t)$ из получившейся системы;

¹В скобках указан номер в диссертации

5) нахождение решения $w(x, t)$ по формуле (17);

6) нахождение $v(x, t) = u(x, t) + w(x, t)$.

В *четвертом параграфе* приводится описание, разработанного программного комплекса [10] и представлена схема разработанного алгоритма. В *пятом параграфе* содержатся результаты обработки информации по восстановлению параметра внешнего воздействия в разработанном программном комплексе. *Шестой параграф* состоит из верификации полученных результатов для математической модели Буссинеска – Лява (1)–(4) на основе метода имитационного моделирования:

1) задается точное значение параметра $q(t)$;

2) решается «прямая» задача (1)–(3) по нахождению только функции $v(x, t)$;

3) вычисляется правая часть $F(t)$ условия переопределения (4);

4) решается обратная задача (1)–(4) с нахождением функции $q(t)$ при найденной функции $F(t)$, с помощью разработанного метода;

5) на каждом шаге последовательных приближений находится значение погрешности δ_i , сравнивая точное значение $\tilde{q}(t)$ с полученным приближенным $q_i(t)$, по формуле

$$\delta_i = \int_0^T (\tilde{q}(t) - q_i(t))^2 dt.$$

Верификация показала эффективность разработанного алгоритма.

В **третьей** главе, состоящей из шести параграфов, приведены все этапы исследования обратной задачи для математической модели продольных колебаний в конструкции из стержней (5)–(9). В *первом параграфе* доказана теорема об однозначной разрешимости обратной задачи для неполного уравнения соболевского типа высокого порядка на основе теории относительно спектрально ограниченных операторов. В *втором параграфе* доказана теорема об однозначной разрешимости обратной задачи для математической модели продольных колебаний в конструкции из стержней (5)–(9). В *четвертом параграфе* приводится описание разработанного программного комплекса [11] и представлена схема реализованного в нем алгоритма. В *пятом параграфе* содержатся результаты обработки информации по восстановлению параметра внешнего воздействия в разработанном программном комплексе. *Шестой параграф* состоит из верификации полученных результатов для математической модели продольных колебаний в конструкции из стержней (5)–(9).

Пример 1. (3.6.1)¹ Рассмотрим математическую модель (5)–(9) для графа G (см. рисунок 1) с заданной следующей входной информацией

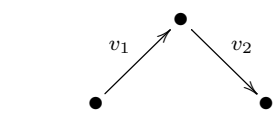


Рисунок 1 – Граф G

$$\alpha = 4, \beta = 1, \gamma = 1, \varepsilon = 0,8, n = 3, T = 10, l_1 = l_2 = \pi,$$

$$v_0(x) = \left(\cos(x), \cos(x + \pi) \right), \quad v_1(x) = \left(\cos(5x), \cos(5(x + \pi)) \right),$$

$$f(x) = \left(\cos(x), \cos(x) \right), \quad K(x) = \left(\cos(x), \cos(x) \right), \quad F(t) = \frac{4 \cos(t)}{3}.$$

Задав точное значение функции $q(t)$ в виде $\tilde{q}(t) = 0$, с помощью разработанного программного комплекса была найдена правая часть $F(t)$ условия пере-

¹В скобках указан номер в диссертации

определения (9). Затем, обработав входную информацию, было получено приближенное значение функции $q(t)$, достигнув допустимого отклонения $0,0065 < \varepsilon$ между соседними приближениями функции $q(t)$ на 17-ом шаге последовательных приближений (см. рисунок 2).

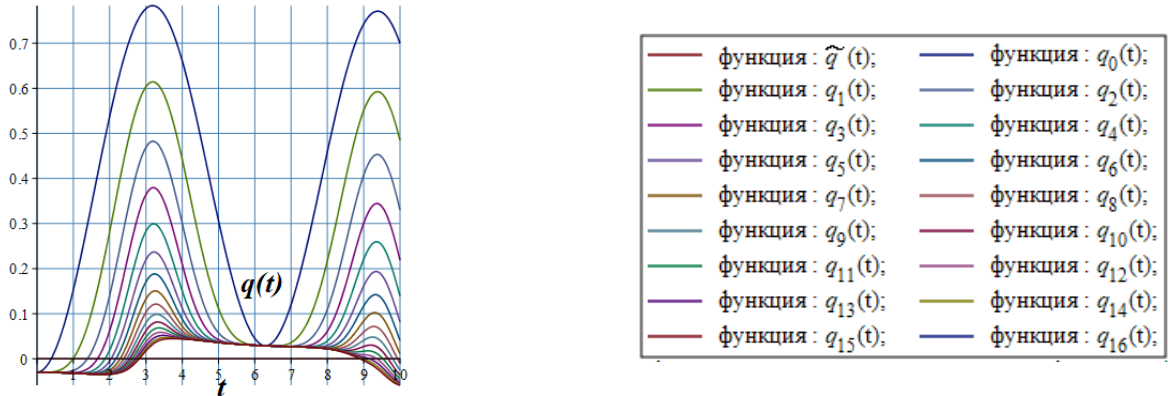


Рисунок 2 – График функции $\tilde{q}(t)$ и функций последовательных приближений

Для верификации метода также была найдена погрешность на каждом i -ом шаге последовательных приближений (см. таблицу 1) относительно известного (заданного) точного значения $\tilde{q}(t)$.

Таблица 1 – Результаты оценки погрешности в зависимости от номера приближения

Номер	Значение	Номер	Значение	Номер	Значение
$i = 1$	3,162277660	$i = 7$	0,3156228297	$i = 13$	0,1066301363
$i = 2$	1,580707372	$i = 8$	0,2416799393	$i = 14$	0,1022310097
$i = 3$	1,072857505	$i = 9$	0,1893569642	$i = 15$	0,1002002078
$i = 4$	0,7682937475	$i = 10$	0,1533508963	$i = 16$	0,09947418145
$i = 5$	0,5631312341	$i = 11$	0,1296694029	$i = 17$	0,09941421820
$i = 6$	0,4188380270	$i = 12$	0,1150269894		

Получено, что отклонения функции $q_i(t)$ от точного уменьшаются с увеличением количества итераций.

В **четвертой** главе, состоящей из пяти параграфов, приведены все этапы исследования обратной задачи для математической модели ионно-звуковых волн в плазме (10)–(13). В *первом параграфе* доказана теорема об однозначной разрешимости обратной задачи для полного уравнения соболевского типа высокого порядка (14)–(16):

Теорема 2. (4.1.3)¹ Пусть пучок \vec{B} полиномиально A -ограничен и

$$\int_{\gamma} \mu^k R_{\mu}^A(\vec{B}) d\mu \equiv \mathbb{O}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 2, \quad \gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$$

выполнено, кроме того, ∞ – полюс порядка $p \in \mathbb{N}_0$ A -резольвенты пучка \vec{B} , оператор $\chi \in C^{p+n}([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{F}))$, $f \in C^{p+n}([0, T]; \mathcal{F})$, $\Psi \in C^{p+2n}([0, T]; \mathcal{Y})$, $C \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$, $\mathcal{U}^0 \subset \ker C$, для любого $t \in [0, T]$ оператор $C(A^1)^{-1}Q\chi$ обратим, причем $(C(A^1)^{-1}Q\chi)^{-1} \in C^{p+n}([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Y}))$, и выполняется условие согласования

¹В скобках указан номер в диссертации

$Cu_{n-1} = \Psi^{(n-1)}(0)$ при некотором начальном значении $u_{n-1} \in \mathcal{U}^1$, а начальные значения $w_k = (\mathbb{I} - P)v_k \in \mathcal{U}^0$ удовлетворяют

$$w_k = - \sum_{j=0}^p K_j^n(B_0^0)^{-1} \frac{d^{j+k}}{dt^{j+k}} \left[(\mathbb{I} - Q)(\chi(0)q(0) + f(0)) \right], \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Тогда существует единственное решение (v, q) обратной задачи (14)–(16), причем $q \in C^{p+n}([0, T]; \mathcal{Y})$, $v = u + w$, где $u \in C^n([0, T]; \mathcal{U}^1)$ – решение регулярной, а функция $w \in C^n([0, T]; \mathcal{U}^0)$ – решение сингулярной задачи, представимое в виде

$$w(t) = - \sum_{j=0}^p K_j^n(B_0^0)^{-1} \frac{d^j}{dt^j} \left[(\mathbb{I} - Q)(\chi(t)q(t) + f(t)) \right].$$

Во втором параграфе доказана теорема об однозначной разрешимости обратной задачи для математической модели ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле (10)–(13).

Теорема 3. (4.2.1)¹ Пусть $f \in C^4([0, T]; \mathcal{F})$, $\Phi \in C^6([0, T]; \mathcal{Y})$, а $K, u_0, u_1, u_2, u_3 \in \mathcal{U}^1$ и выполнено одно из условий $(\alpha \in \sigma(\Delta)) \wedge (\alpha = \gamma)$ или $\alpha \notin \sigma(\Delta)$. Также, выполняются условия

$$\sum_{\alpha=\lambda_{kmn}} \langle v_j, \mathbb{X}_{kmn} \rangle = 0, \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

$$\sum_{\lambda_{kmn} \neq \alpha} \frac{\langle f(\cdot, t), K(x) \rangle}{\lambda_{kmn} - \alpha} \neq 0, \quad \langle v_3, K(x) \rangle = \Phi'''(0)$$

при некотором начальном значении $v_3 \in \mathcal{U}^1$, а начальные значения $w_j = (\mathbb{I} - P)v_j \in \mathcal{U}^0$, $j = 0, 1, 2, 3$ удовлетворяют

$$\langle v_j - \left(\frac{c^2}{\kappa\pi^2 n^2} \right) \frac{\partial^j}{\partial t^j} \left(q(t)f(\cdot, t) \right) \Big|_{t=0}, \mathbb{X}_{kmn} \rangle = 0 \quad \text{для } k : \lambda_{kmn} = \alpha,$$

Тогда существует единственное решение (v, q) обратной задачи (10)–(13), причем $q \in C^2([0, T]; \mathcal{Y})$, $v = u + w$, где $u \in C^4([0, T]; \mathcal{U}^1)$ – решение регулярной, а функция $w \in C^4([0, T]; \mathcal{U}^0)$ – решение сингулярной задачи, представимое в виде

$$w(t) = \sum_{\lambda_{kmn}=\alpha} \left(\frac{c^2}{\kappa\pi^2 n^2} \right) \langle q(t)f(\cdot, t), \mathbb{X}_{kmn} \rangle \mathbb{X}_{kmn}.$$

В третьем параграфе содержится алгоритм численного исследования обратной задачи для математической модели ионно-звуковых волн в плазме во внешнем магнитном поле (10)–(13). В четвертом параграфе приводится описание, по шагам, разработанной программы [12] и представлена схема разработанного алгоритма. В пятом параграфе содержатся результаты по обработке информации по восстановлению параметра воздействия внешнего магнитного поля.

Пример 2. (4.5.2)¹ По заданной следующей входной информации

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = -4, \quad \kappa = -4, \quad \varepsilon = 1, \quad T = 3, \quad k = 2, \quad m = n = 1, \quad a = b = c = \pi,$$

$$v_0(x) = x_1 x_2 x_3 (x_1 - \pi)(x_2 - \pi)(x_3 - \pi), \quad v_1(x) = 2 \sin(x_1) \sin(x_2) \sin(x_3),$$

¹В скобках указан номер в диссертации

$$v_2(x) = \sin(2x_1) \sin(x_2) \sin(x_3), \quad v_3(x) = \pi \sin(x_1) \sin(x_2) \sin(x_3),$$

$$f(x) = \sin(x_1), \quad K(x) = \sin(\pi x_1), \quad F(t) = \frac{-4\pi}{\pi^2 - 1} \cos(t + \pi^2)$$

был восстановлен параметр воздействия внешнего магнитного поля $q(t)$, достигнув допустимого отклонения $0,27 < \varepsilon$ между соседними приближениями функции $q(t)$ на 7-ом шаге последовательных приближений (см. рисунок 3).

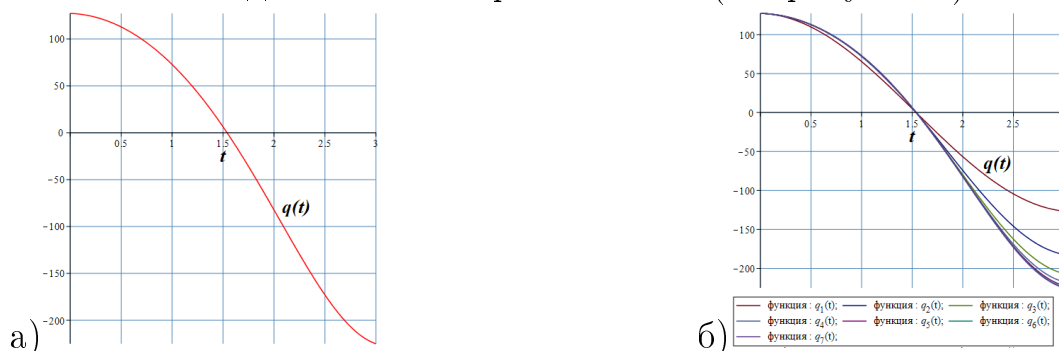


Рисунок 3 – График: а) функции $q(t)$;
б) функций последовательных приближений функции $q(t)$

Далее в программе была найдена функция $v(x, t)$, представляющая обобщенный потенциал электрического поля. На рисунке 4 представлен ее график в сечении $x_2 = \frac{1}{2}$.

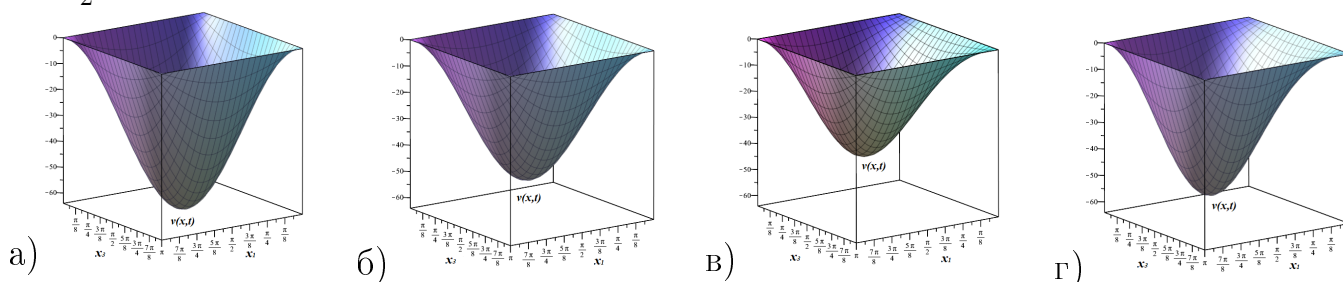


Рисунок 4 – График функции $v(x, t)$ при $x_2 = \frac{1}{2}$ и:
а) $t = 0$; б) $t = 1,03$; в) $t = 2,28$; г) $t = 3$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе приведены результаты аналитического и численного исследования обратных задач для математических моделей Буссинеска – Лява, продольных колебаний в конструкции из стержней и ионно-звуковых волн в плазме, а именно: 1) построена информационно-логическая модель исследования обратных задач, позволяющая определить объекты исследования и выбрать методы для формализации обратных задач и представления о проблематике исследования; 2) получены результаты аналитического исследования обратных задач для трех математических моделей, которые позволили получить условия однозначной разрешимости для них, причем эти результаты могут быть использованы для других математических моделей, построенных на уравнениях соболевского типа высокого порядка; 3) разработаны алгоритмы и численные методы нахождения решения, включающего восстановление параметра внешнего воздействия, для трех математических моделей, которые позволили впервые найти это решение;

4) реализованы программы и комплексы программ позволяющие специалистам в области математического моделирования и системного анализа прогнозировать дальнейшее поведение объектов исследования и подбирать для них подходящие параметры; 5) проведены вычислительные эксперименты, которые позволили обработать входную информацию для восстановления параметра внешнего воздействия и смоделировать некоторые процессы упругости, акустики и гидродинамики; 6) проведена верификация полученных численных результатов, которая показала сходимость приближенного решения к точному и хорошую эффективность разработанных алгоритмов и методов.

Разработанные аналитические методы восстановления параметров внешнего воздействия предлагается применять для моделирования других процессов и явлений, построенных на уравнениях соболевского типа высокого порядка. Кроме того, рекомендуется использовать полученные результаты численного исследования для предотвращения влияния негативных факторов, например, процессов разрушения мелководных берегов, разрушения несущих конструкций из стержней или повреждения космических станций или других важных объектов находящихся в околоземной космической плазме. К перспективам дальнейшей разработки отнесем, например, исследование вопроса устойчивости обратных задач или восстановление других параметров состояния среды для изучаемых в данной диссертационной работе математических моделей.

Основные публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в ведущих российских рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК при Министерстве науки и высшего образования РФ, и в рецензируемых научных журналах и изданиях, индексируемых Scopus и Web of Science:

1. Zamyshlyeva, A. A. Numerical investigation of the Boussinesq – Love mathematical models on geometrical graphs / A. A. Zamyshlyeva, **A. V. Lut** // Bulletin of the South Ural State University. Series: mathematical modelling, programming and computer software. – 2017. – V. 10, № 2. – P. 137–143. (BAK, Web of Science, Scopus, Q2)

2. Zamyshlyeva, A. A. Inverse problem for Sobolev type mathematical models / A. A. Zamyshlyeva, **A. V. Lut** // Bulletin of the South Ural State University. Series: mathematical modelling, programming and computer software. – 2019. – V. 12, № 2. – P. 25–36. (BAK, Web of Science, Scopus, Q2)

3. Zamyshlyeva, A. A. Inverse problem for the Boussinesq – Love mathematical model / A. A. Zamyshlyeva, **A. V. Lut** // Semigroups of operators – theory and applications. – 2020. – V. 325. – P. 427–434. (Scopus)

4. **Lut, A. V.** Numerical investigation of the inverse problem for the Boussinesq – Love mathematical model / **A. V. Lut** // Journal of computational and engineering mathematics. – 2020. – V. 7, № 3. – P. 45–59. (BAK)

5. Zamyshlyayeva, A. A. Inverse problem for incomplete Sobolev type equation of higher order / A. A. Zamyshlyayeva, **A. V. Lut** // Differential equations and control processes. – 2021. – № 3. – P. 71–84. (BAK, Scopus, Q2)

6. **Lut, A. V.** Numerical investigation of the inverse problem for the Boussinesq – Love mathematical model on a graph / **A. V. Lut**, A. A. Zamyshlyayeva // Journal of computational and engineering mathematics. – 2021. – V. 8, № 3. – P. 71–85. (BAK)

7. Zamyshlyayeva, A. Inverse problem for the Sobolev type equation of higher order / A. Zamyshlyayeva, **A. Lut** // Mathematics. – 2021. – V. 9. – 1647. (Web of Science, Scopus, Q1)

8. Zamyshlyayeva, A. A. Processing of information on recovery of the external force parameter for the mathematical model of ion-acoustic waves in plasma / A. A. Zamyshlyayeva, **A. V. Lut** // Journal of computational and engineering mathematics. – 2022. – V. 9, № 1. – P. 59–72. (BAK)

Свидетельства о регистрации программы:

9. Моделирование продольных колебаний в элементах конструкции из тонких упругих стержней: Свидетельство № 2017616658 / **Лут А. В.** (RU), Замышляева А. А. (RU); правообладатель ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2017613618; заявл. 20.04.2017; зарегистр. 09.06.2017, реестр программ для ЭВМ.

10. Программный комплекс для моделирования продольных колебаний в тонком упругом стержне с возможностью восстановления внешней нагрузки на стержень: Свидетельство № 2020660939 / **Лут А. В.** (RU); правообладатель ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 20200660072; заявл. 08.09.2020; зарегистр. 15.09.2020, реестр программ для ЭВМ.

11. Программный комплекс для моделирования продольных колебаний в элементах конструкций из двух тонких упругих стержней с восстановлением коэффициента внешней нагрузки: Свидетельство № 2022610567 / **Лут А. В.** (RU), Замышляева А. А. (RU); правообладатель **Лут А. В.** – 2021666112; заявл. 05.10.2021; зарегистр. 13.01.2022, реестр программ для ЭВМ.

12. Обработка информации при моделировании ионно-звуковых волн в плазме с восстановлением параметра воздействия внешнего магнитного поля: Свидетельство № 2022616514 / **Лут А. В.** (RU), Замышляева А. А. (RU); правообладатель ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2022616271; заявл. 13.04.2022; зарегистр. 13.04.2022, реестр программ для ЭВМ.

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 07.07.2022. Формат 60x84 1/16. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 0,93. Тираж 100 экз. Заказ 266/217.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.

454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.