На правах рукописи

Конкина Александра Сергеевна

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С МНОГОТОЧЕЧНЫМ НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНЫМ УСЛОВИЕМ

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

ЧЕЛЯБИНСК – 2020

Работа выполнена в ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)»

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук, доцент
Загребина Софья Александровна.

**Официальные оппоненты:** доктор физико-математических наук,
профессор Кризский Владимир Николаевич
Стерлитамакский филиал ФГБОУ ВО
«Башкирский государственный университет»,
кафедра математического моделирования,
профессор;
кандидат физико-математических наук,
Сафонов Егор Иванович
ФГБОУ ВО «Югорский государственный
университет», доцент института цифровой
экономики.

**Ведущая организация:** ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет»

Защита состоится 28 сентября 2020 года в 15 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.298.14 при Южно-Уральском государственном университете по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, ауд. 1001.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета и на сайте:
https://www.susu.ru/dissertation/d212-298-14

Автореферат разослан «____» __________ 2020 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук, доцент Манакова Н.А. Манакова

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность и степень разработанности темы исследования.** В настоящее время одной из важных проблем мегаполиса является управление дорожным движением, а в связи с проблемой образования предзаторных и заторных ситуаций в населенных пунктах, соответственно, эти исследования являются актуальными. Существует несколько подходов математического моделирования поведения движения автотранспорта. Наиболее распространенные из них: микроскопический, макроскопический, на основе теории клеточных автоматов. Теория клеточных автоматов возникла в середине прошлого века. Одним из ее разработчиков был Дж. фон Нейман[1], предложивший двумерный клеточный автомат. Позже теорию клеточных автоматов стали использовать при построении моделей транспортного потока. Микроскопический подход моделирует поведение отдельного транспортного средства, здесь в явном виде задаются координаты местоположения каждого автомобиля, его скорость, ускорение. Базовая модель такого подхода – «Следование за лидером». Она основана на предположении, что имеется связь между «ведомым» и «ведущим» автомобилями, и поведение первого сильно зависит от действий второго. Третий подход – макроскопический, с его помощью строятся модели-аналоги, и транспортный поток рассматривается как гидродинамический, или газодинамический поток. При применении данного подхода можно найти время или интенсивность движения, среднюю скорость, уровень загрузки сети. Одним из создателей данного подхода является А.Б. Куржанский, который транспортный поток моделирует системой Навье – Стокса, описывающей течение вязкой несжимаемой жидкости. Отличительная черта данного исследования заключается в том, что модель транспортного потока строится на основе системы уравнений Осколкова, которые обобщают систему Навье – Стокса. Здесь помимо вязкости и несжимаемости потока, учитывает-

[1]Нейман, Дж. фон. Теория самовоспроизводящихся автоматов. М.: Мир, 1971.

ся упругость, из-за которой появляется эффект ретардации, свойственный вязкоупругим несжимаемым жидкостям. В диссертационной работе рассматриваются следующие гидродинамическиие модели.

**Математическая модель транспортного потока [2].** Рассмотрим конечное упорядоченное множество $\mathbf{\Gamma} = \{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \ldots, \mathbf{G}_i, \ldots\}$ геометрических графов, где $\mathbf{G}_i = \mathbf{G}_i(\mathcal{V}_i, \mathcal{E}_i)$. Каждая пара геометрических графов $\mathbf{G}_i$ и $\mathbf{G}_{i+1}$ соответствует $i$-тому перекрестку до и после смены сигнала светофора. Здесь $\mathcal{V}_i = \{V_{ij}\}$ – множество вершин геометрического графа $\mathbf{G}_i$, а $\mathcal{E}_i = \{E_{ik}\}$ – множество ребер $\mathbf{G}_i$, причем каждому ребру $E_{ik}$ каждого графа $\mathbf{G}_i$ ставится в соответствие два числа – «длина» ребра $l_{ik} \in \mathbb{R}_+$ и её «ширина» $d_{ik} \in \mathbb{R}_+$. Таким образом, математическая модель имеет вид:

$$\lambda_i u_{ikt} - u_{iktxx} = \nu_i u_{ikxx} + f_{ik}, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} u_{ik}(0,t) = u_{im}(l_{im},t) = u_{il}(0,t) = u_{in}(l_{in},t), \\ \forall E_{ik} \in E^{\alpha}(V_{ij}),\ \forall E_{im} \in E^{\omega}(V_{ij}), \end{gathered} \tag{2}$$

$$\sum_{E_{ik} \in E^{\alpha}(V_{ij})} b_{ik} u_{ikx}(0,t) - \sum_{E_{im} \in E^{\omega}(V_{ij})} b_{im} u_{imx}(l_{im},t) = 0. \tag{3}$$

Здесь $u_{ik} = u_{ik}(x,t)$, $x \in [0, l_{ik}]$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ ($\equiv \{0\} \cup \mathbb{R}_+$) характеризует среднюю скорость транспортного потока на $E_{ik}$; $f_{ik} = f_{ik}(x,t)$, $(x,t) \in [0, l_{ik}] \times \overline{\mathbb{R}}_+$, отвечает (усредненной) силе, которая заставляет крутиться колеса транспортных средств. Коэффициенты $\lambda_i$ равны единице, поделенной на коэффициент ретардации, который может принимать отрицательные значения, поэтому считаем $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Коэффициент $\nu_i$ отвечает за вязкость транспортного потока, т.е. за его способность «гасить» резкие перепады скорости; по смыслу $\nu_i \in \mathbb{R}_+$. Будем рассматривать транспортный поток на перекрестке со светофорами (рис. 1,2), где перекресток представлен в виде восьмиреберного графа, где красным цветом выделены направления с запрещенным сигналом светофора.

[2] Свиридюк Г.А., Загребина С.А., Конкина А.С. Уравнения Осколкова на геометрических графах как математическая модель дорожного движения // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2015. – Т. 8, № 3. — С. 148-154. DOI: 10.14529/mmp1503010

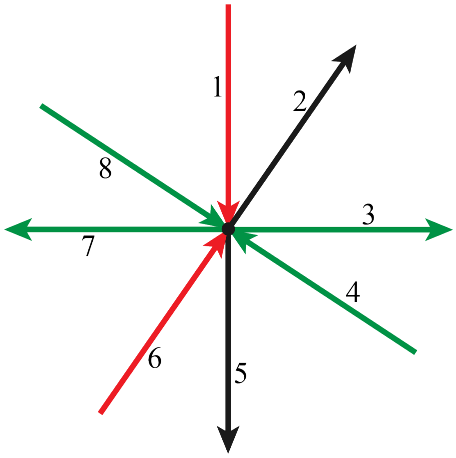


**Рис. 1**. Перекресток до смены сигнала светофора - геометрический граф $\mathbf{G}_1$, в период времени $[\tau_{j-1}, \tau_j]$

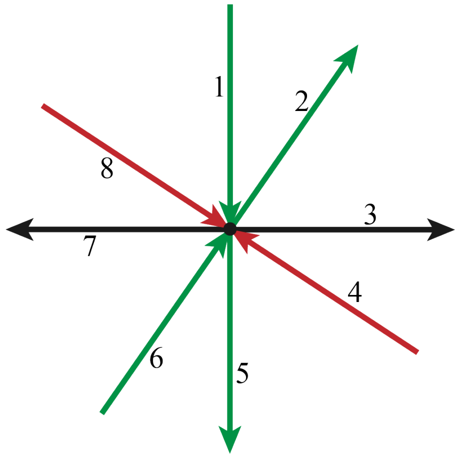


**Рис. 2**. Перекресток после смены сигнала светофора - геометрический граф $\mathbf{G}_2$, в период времени $[\tau_j, \tau_{j+1}]$

**Математическая модель динамики вязкой несжимаемой жидкости**[3]**.** Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m = \{2, 3\}$, – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $C^\infty$. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим задачу Дирихле

$$u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \tag{4}$$

для линеаризованной системы уравнений Навье – Стокса

$$u_t = \nu\nabla^2 u - \nabla p + f, \;\; 0 = \nabla \cdot u. \tag{5}$$

Здесь вектор-функция $u = (u_1, u_2, ..., u_m)$, $u_t = u_t(x,t)$, соответствует скорости жидкости, функция $p = p(x,t)$ – давлению, параметр $\nu \in \mathbb{R}_+$ характеризует вязкость.

Рассматриваемые модели можно редуцировать к линейному уравнению соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f. \tag{6}$$

Впервые такие уравнения появились в работе А. Пуанкаре в 1885 году. Систематическое их изучение началось с работ С.Л. Соболева, выполненных в 40-х годах прошлого столетия. Исследованию уравнений соболевского типа и их приложений посвящено большое количество работ как российских (Г.В. Демиденко, С.В. Успенского, Н.В. Сидорова, М.В. Фалалеева,

[3]Темам, Р. Уравнения Навье – Стокса. Теория и численный анализ – М.: Мир, 1981.

И.В. Мельниковой, В.Н. Врагова, С.Г. Пяткова, А.И. Кожанова, Г.А. Свиридюка, Т.Г. Сукачевой, В.Е. Федорова, В.Ф. Чистякова и многих других), так и зарубежных (A. Favini, A. Yagi, S. Mesloub, T. Hayat и другие) авторов.

Уравнение (6) будем рассматривать с *многоточечным начально-конечным условием*[4]

$$\begin{gathered} P_j(u(\tau_j) - u_j) = 0, \quad u_j \in \mathfrak{U}, \quad j = \overline{0, n}, \\ \tau_j \in (a, b), \quad \tau_{j-1} < \tau_j, \quad j = \overline{1, n}. \end{gathered} \tag{7}$$

Все рассмотрения проводятся в банаховых пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$, причем операторы $L$, $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, а $P_j$ – относительно спектральные проекторы, о которых речь пойдет дальше. Заметим сразу, что частным случаем (7) в случае, когда $\sigma_j^L(M) = \emptyset$, $j = \overline{1, n}$, является задача Шоуолтера – Сидорова

$$P(u(0) - u_0) = 0, \tag{8}$$

важная роль которой отмечена в ряде численных исследований экономических и технических моделей. Поскольку движение транспортного потока на перекрестке зависит от переключения светофора, то необходимо учитывать различные моменты времени, средние скорости потоков. Поэтому использовать условия Коши или Шоуолтера – Сидорова в данном случае недостаточно. Будем рассматривать начально-конечное условие (при $n = 1$) на каждом перекрестке, а в населенном пункте многоточечное начально-конечное условие (7) поскольку есть система перекрестков. Для системы уравнений Навье – Стокса до сих пор не решен вопрос о существовании решений задачи Коши – Дирихле. Поэтому в диссертационной работе сделана попытка заменить условие Коши более общим многоточечно начально-конечным условием, тем самым доказать однозначную разрешимость линейной системы Навье – Стокса с краевым условием Дирихле. Необходимо

[4]Загребина, С.А. Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2013. – Т.6, №2. – С.5-24.

отметить, что в настоящее время начально-конечные задачи для вырожденных или невырожденных уравнений математической физики активно изучаются, в том числе и на множествах различной геометрической структуры (Панков А.А, Панкова Т.Е. [5], Пятков С.Г. [6], Свиридюк Г.А., Загребина С.А.[7], Манакова Н.А.[8], Замышляева А.А.[9]) Все это обуславливает актуальность данного исследования.

**Целью работы** является аналитическое и численное исследование гидродинамических моделей с многоточеным начально-конечным условием с разработкой алгоритмов численных методов и комплексов программ.

Для достижения данной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Исследовать математическую модель транспортного потока в системе перекрестков с учетом эффекта ретардации и доказать однозначную разрешимость многоточечной начально-конечной задачи для этой модели.

2. Исследовать линейную математическую модель Навье – Стокса и доказать однозначную разрешимость многоточечной начально-конечной задачи для этой модели.

3. Разработать алгоритмы численных методов решения многоточечных начально-конечных задач для исследуемых моделей.

4. Реализовать в виде программ для ЭВМ разработанные численные методы и провести вычислительные эксперименты для численного решения многоточечных начально-конечных задач для исследуемых моделей.

**Научная новизна.**

[5]Панков А.А., Панкова Т.Е. Нелинейные эволюционные уравнения с необратимым операторным коэффициентом при производной // Докл. Акад. наук Украины. – 1993. – № 9. – С. 18–20.

[6]Pyatkov S.G. Operator theory. Nonclassical problems. Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2002.

[7]Свиридюк Г.А., Загребина С.А. Задача Веригина для линейных уравнений соболевского типа с относительно p-секториальными операторами // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т.38, №12. – С.1646-1652.

[8]Манакова Н.А., Дыльков А.Г. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейной модели Хоффа // Мат. заметки. – 2013. – Т.94, №2. – С.225-236.

[9]Замышляева А.А., Цыпленкова О.Н. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнения Буссинеска – Лява // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – №5 (264), вып. 11. – С.13-24.

*В области математического моделирования*
В диссертационной работе впервые: разработан новый метод моделирования транспортного потока в системе перекрестков с учетом эффекта ретардации, свойственный вязкоупругим несжимаемым жидкостям. Для этого были доказаны однозначные разрешимости для модели Осколкова на восьмирёберном геометрическом графе и линейной модели Навье – Стокса с многоточечным начально-конечным условием в области.

*В области численных методов* разработаны алгоритмы численных методов, позволяющие находить приближенные решения многоточечных начально-конечных задач для изучаемых вырожденных гидродинамических моделей.

*В области комплексов программ* разработаны программные комплексы нахождения приближенного решения вырожденных моделей с многоточечными начально-конечными условиями, позволяющие проводить вычислительные эксперименты для модельных задач.

**Методология и методы диссертационного исследования**. Исследования, проведенные в работе, опираются на методологию уравнений соболевского типа, разработанную Г.А. Свиридюком. Сюда включается метод Г.А. Свиридюка разрешающих (полу)групп операторов; теория графов для уравнений соболевскогом типа, заложенная Г.А. Свиридюком и развитой его учениками. В ее рамках были проведены редукции математической модели транспортного потока и модели Навье – Стокса к абстрактным уравнениям соболевского типа, которые были дополнены соответствующими многоточечными начально-конечными условиями.

**Теоретическая и практическая значимость.** Значимость результатов обусловлена решением актуальной задачи теории неньютоновских жидкостей с применением современного математического аппарата. Полученные в работе теоретические результаты являются вкладом в развитие общей теории линейных моделей соболевского типа. Доказана однозначная разрешимость многоточечных начально-конечных задач для математических моделей Навье – Стокса и движения транспортного потока. Таким образом, результаты диссертационного исследования являются полезными для развития общей теории уравнений соболевского типа, теории многоточечных начально-конечных задач.

Практическая значимость работы заключается в применимости алгоритмов численных методов и комплексов программ для решения прикладных задач в динамической метеорологии для описания движения воздушных масс атмосферы, в частности, при формировании прогноза погоды. Модель движения транспортного потока может быть использована для разработки навигационных программ. Разработанные алгоритмы численных решений рассматриваемых задач и реализованные в виде программных комплексов в вычислительной среде Maple, могут быть использованы в дальнейшем для исследования других вырожденных математических моделей.

**Апробация работы.** Результаты работы апробированы на международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2014», г. Воронеж, 25–31 января 2016 г.; на международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, г. Суздаль, 04 – 09 июля 2014 г.; на XV Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике, г. Сочи, 28 сентября – 5 октября 2014 г.; на Всероссийской конференции с международным участием, посященной памяти В.К. Иванова, г. Челябинск, 10 – 14 ноября 2014 г.; на XVI Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике, г. Челябинск, 21 – 27 июня 2015 г.; на Всероссийской научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», Самара, 01 – 04 июля 2015 г.; на XII Всероссийской школе-конференции молодых учёных «Управление большими системами», г. Волгоград, 07 – 11 сентября 2015 г.; на международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2016», г. Воронеж, 25 — 31 января 2016 г.; на 2016 2nd international conference on industrial engineering, applications and manufacturing, Chelyabinsk, 19 – 20 мая 2016 г.; на XXIX Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях - ММТТ-29», г. Санкт-Петербург, 31 мая – 3 июня 2016 г.; на XIII Всероссийской школе-конференции молодых учёных «Управление большими системами», г. Самара, 05 – 09 сентября 2016 г.; на XIV Всероссийской школе-конференции молодых учёных «Управление большими системами», г. Пермь, 04 – 08 сентября 2016 г.; на XIX всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике, г. Сочи, 22 – 30 сентября 2018 г.; на XXXII Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-32», г. Санкт-Петербург, 03 – 07 июня 2019 г.; на XIII Всероссийском совещание по проблемам управления, г. Москва, 17 – 20 июня 2019 г. Выводы и промежуточные итоги исследования не единожды были представлены и апробированы на областном семинаре «Уравнения соболевского типа» профессора Г.А. Свиридюка.

**Степень достоверности результатов.** Полученные результаты подтверждаются строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в диссертации, согласием между теоретическими положениями и результатами вычислительных экспериментов, проведённых в данной работе и исследованиями других авторов.

**Публикации**. Результаты по теме диссертации изложены в 7 научных работах [1–7], 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1–5], в том числе 4 в изданиях, входящих в системы цитирования Scopus и (или) Web of Science, два свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [6,7]. В совместных с научным руководителем работах научному руководителю принадлежит постановка задачи, на защиту выносятся только результаты, полученные ее автором и не затрагивают интересы соавторов.

**Структура и объем работы**. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и двух приложений. Объем диссертации составляет 118 страниц. Список литературы содержит 84 наименования.

## Краткое содержание диссертации

**Во введении** приводится постановка задачи, ставится цель исследования, описываются методы исследования и обосновывается актуальность, теоретическая и практическая значимость проведенного исследования, определяются методы исследования и новизна полученных результатов, дана характеристика степени разработанности проблемы и степени достоверности результатов, представлена апробация результатов.

**Первая глава** содержит пропедевтический характер. Она содержит определения, теоремы и вспомогательные утверждения, опираясь на которые получены основные результаты исследования математических моделей транспортного потока и динамики вязкой несжимаемой жидкости, построенные на базе теории Г.А. Свиридюка[10].

**Во второй главе** моделируется транспортный поток в системе перекрестков с учетом эффекта ретардации, свойственный вязкоупругим несжимаемым жидкостям.

В п.2.1 изучается математическая модель транспортного потока на одном перекрестке. Рассмотрим систему уравнений Осколкова

$$\lambda u^j_{kt} - u^j_{ktxx} = \nu u^j_{kxx} + f^j_k,\ k = \overline{1,8}, \tag{9}$$

описывающую транспортный поток, на восьмирёберном геометрическом графе с условиями непрерывности и баланса потока

$$\begin{aligned} &u^j_1(l_1,t) = u^j_2(0,t) = u^j_3(l_3,t) = u^j_4(0,t) = \\ &= u^j_5(l_5,t) = u^j_6(0,t) = u^j_7(l_7,t) = u^j_8(0,t), \end{aligned} \tag{10}$$

[10]Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.

$$
\begin{gathered}
d_1u_{1x}^j(l_1,t)-d_2u_{2x}^j(0,t)+d_3u_{3x}^j(l_3,t)-d_4u_{4x}^j(0,t)+\\
+d_5u_{5x}^j(l_5,t)-d_6u_{6x}^j(0,t)+d_7u_{7x}^j(l_7,t)-d_8u_{8x}^j(0,t)=0,\\
\\
u_{1x}^j(0,t)=u_{2x}^j(l_2,t)=u_{3x}^j(0,t)=u_{4x}^j(l_4,t)=\\
=u_{5x}^j(0,t)=u_{6x}^j(l_6,t)=u_{7x}^j(0,t)=u_{8x}^j(l_8,t)=0.
\end{gathered}
\tag{11}
$$

Отметим, что задача (9) – (11) ассоциируется с одним перекрестком. Рассмотрим два последующих $j$ и $j+1$ момента переключения светофора, которые являются началом и концом временного отрезка на котором будет рассматриваться транспортный поток на определенном восьмирёберном геометрическом графе. Тогда до включения светофора начальное условие будет иметь вид

$$
P(u^j(x,\tau_{j-1})-u_{j-1}^j(x))=0. \tag{12}
$$

По окончании временного отрезка транспортный поток меняет свое направление движения, тем самым возникает необходимость на новом временном отрезке (до следующего переключения светофора) рассмотреть новый восьмирёберный геометрический граф. В п.2.2 модель транспортного потока на перекрестке редуцируется к уравнению соболевского типа с относительно $p$-ограниченным оператором и доказывается однозначная разрешимость модели дорожного движения на перекрестке с многоточечным начально-конечным условием.

**Теорема 1.** (2.2.1) Если оператор $M$ $(L,p)$-ограничен, $p\in\{0\}\cup\mathbb{N}$, то для любых $f\in C^\infty(\mathfrak{I};\mathfrak{F}))$, $u_j\in\mathfrak{U}$, $j=\overline{0,n}$, задача (6), (7) однозначно разрешима, причем решение имеет вид

$$
u(t)=-\sum_{k=0}^{p}H^kM_0^{-1}(\mathbb{I}-Q)f^{(k)}(t)+\sum_{j=0}^{n}U_j^{t-\tau_j}u_j+\sum_{j=0}^{n}\int_{\tau_j}^{t}U_j^{t-s}L_1^{-1}Qf(s)ds, \tag{13}
$$

где $H=M_0^{-1}L_0\in\mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$, $U_j^\bullet$ – специальным образом построенные разрешающие группы операторов, $L_0$ $(L_1)$ – сужение оператора $L$ на $\mathfrak{U}^0$ $(\mathfrak{U}^1)$, $M_0$ $(M_1)$ – сужение оператора $M$ на $\operatorname{dom}M\cap\mathfrak{U}^0$ $(\operatorname{dom}M\cap\mathfrak{U}^1)$.

В п.2.3 используются результаты первого и второго параграфов, для описания транспортного потока в населенном пункте используется система восьмирёберных геометрических графов. Проводится редукция рассматриваемой модели к системе уравнений соболевского типа, доказывается их однозначная разрешимость.

**Теорема 2.** (2.3.1) При любых $\lambda_i$, $\nu_i \in \mathbb{R}_+$, $f_i \in \mathfrak{F}(\mathbf{G}_i)$ и

$$u_{0i} \in \mathfrak{U}(\mathbf{G}_i) \ \text{ таких, что } u_m(\tau_m) \in \mathfrak{U}(\mathbf{G}_{m+1}), m = 0, 1, 2, \ldots, i, \ldots,$$

существует единственное решение задачи (1) – (3), (7).

В пп. 2.4, 2.5 представлен алгоритм численного решения и описание программы. В п.2.6 приведен вычисленный эксперимент. Для проведения вычислительного эксперимента вычисляются собственные значения и собственные функции $\varphi_k(x)$ задачи Штурма – Лиувилля на восьмирёберном геометрическом графе. Приведем основные этапы алгоритма на конкретном примере.

Этап 1. Рассмотрим один перекресток (см. рис. 3). Вводим входных данных: $\lambda = 10; \nu = 1; f_k(x) = 0; l_1 = l_2 = \pi$, начальные скорости

$$u_{00} = \left(5\sin(x + \frac{\pi}{2}) - 2, 5\sin(4x + \frac{\pi}{2}) - 2\right),$$
$$u_{01} = \left(10\sin(x - \frac{\pi}{2}) + 3, 10\sin(2x - \frac{\pi}{2}) + 3\right).$$

Этап 2. Представим решение в виде галеркинской суммы. Полученное уравнение преобразуется с помощью умножения на $\varphi_k(x)$ скалярно. Составляется система алгебро – дифференциальных уравнений. Для каждого ребра составляются многоточечные начально-конечные условия для системы уравнений.

Этап 3. Решается система алгебро – дифференциальных уравнений с соответсвующими начальными данными и условиями многоточечной начально-конечной задачи и подставляются найденные галеркинские коэффициенты в приближенное решение. Выводится решение в виде графика (см. рис. 4, 5).

**Рис. 3**. Карта дороги

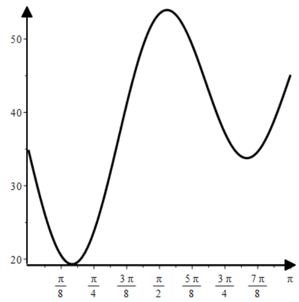

**Рис. 4**. График решения задачи (1) - (3), (7) до смены сигнала светофора

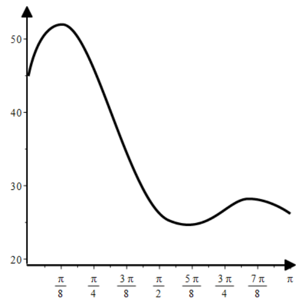

**Рис. 5**. График решения задачи (1) - (3), (7) после смены сигнала светофора

**Третья глава** посвящена изучению линейной модели Навье – Стокса с многоточечным начально-конечным условием.

В п.3.1 рассматриваются относительно спектральные проекторы. В п.3.2 рассматривается многоточечная начально-конечная задача для уравнений соболевского типа с относительно $p$-секториальным оператором. В п.3.3 рассматривается линейная модель вязкой несжимаемой жидкости

**Теорема 3.** (3.3.1) При любых $\nu \in \mathbb{R}_+$, $\tau_j \in \mathbb{R}_+$ $(\tau_j < \tau_{j+1})$, $u_j \in \mathfrak{U}$, $j = \overline{0, n}$, существует единственное решение задачи (4), (7) для уравнений (5), причем это решение $u = u(t) = (u_\tau, u_\pi, u_p)$ имеет вид

$$u_\sigma(t) = \sum_{j=0}^{n} U_j^{t-\tau_j} u_{\tau_j \sigma}, \;\; u_\pi \equiv 0, \;\; u_p \equiv 0.$$

В п.3.4 описывается метод численного исследования линейной модели Навье – Стокса в осесимметричной области. В п.3.5 разработан алгоритм метода численного исследования, а также дано описание программы. В п.3.6 показан и проведен вычисленный эксперимент для линейной модели вязкой несжимаемой жидкости.

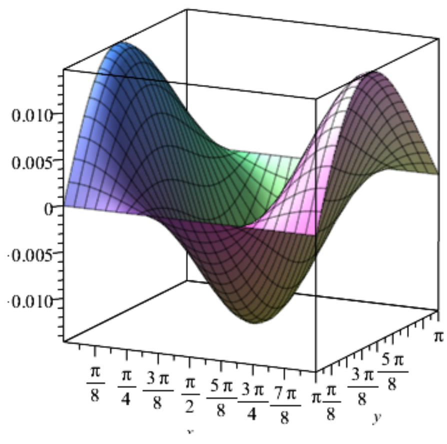

**Рис. 6**. График решения задачи (4), (7) для уравнений (5) при $t = 1$

**Пример.** Вводятся параметры: $\lambda = 1; \beta = 4; \alpha = -2; \chi = 1; \nu = 2$, начальная функция $u_0 = \frac{2}{\pi} \sin(2x) \sin(y)$ и с помощью разработанного метода решается задача. График решения см. рис. 6.

В заключении обобщаются и рассматриваются итоги выполненного исследования, перспективы дальнейшей разработки тем.

В приложениях приводятся свидетельства о регистрации программ ЭВМ.

**Результаты, выносимые на защиту:**

– в рамках разработки новых математических методов моделирования объектов и явлений (п.1) разработан новый метод моделирования транспортного потока с учетом эффекта ретардации, свойственный вязкоупругим несжимаемым жидкостям; предложено новое начально-конечное условие для исследования разрешимости линейной модели Навье – Стокса;

– в рамках развития качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей (п.2) качественно исследованы вырожденные модели гидродинамики с применением многоточечных начально-конечных условий;

– в рамках реализации эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов (п.4) разработаны программные комплексы, реализованные в вычислительной среде в вычислительной среде Maple; проведены вычислительные эксперименты.

### Публикации автора по теме диссертации

*Статьи, опубликованные в ведущих российских рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК при Министерстве науки и высшего образования РФ и в рецензируемых научных журналах и изданиях, индексируемых Scopus и Web of Scienct:*

1. Zagrebina, S.A. The multipoint initial-final value condition for the Navier – Stokes linear model/ S.A. Zagrebina, A.S. Konkina // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2015. – Т. 8, № 1. — С. 132 – 137. (ВАК, Scopus)

2. Свиридюк, Г.А. Уравнения Осколкова на геометрических графах как математическая модель дорожного движения/Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина, А.С. Конкина //Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2015. – Т. 8, № 3. — С. 148 – 154. DOI: 10.14529/mmp1503010 (ВАК, Scopus)

3. Zagrebina, S.A. Traffic management model / S.A. Zagrebina, A.S. Konkina // 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2016. – Proceedings,

article № 7911712. DOI: 10.1109/ICIEAM.2016.7911712 (Scopus)

4. Konkina, A.S. Numerical solution of a linear system of Navier – Stokes equations in an axisymmetric domain // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2019. – Vol. 6, № 3. – P. 69-75. (ВАК)

5. Konkina, A.S. Numerical research of the mathematical model for traffic flow // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2019. – Т. 12, № 4. – С. 128–134. (ВАК, Scopus, WoS)

**Свидетельства о регистрации программы:**

6. Конкина, А.С. Программный комплекс моделирования динамики вязкой несжимаемой жидкости № 20196618468 / Конкина А.С. (RU); правообладатель Конкина А.С. – 2019660610; заявл. 29.08.2019; зарегистр. 10.09.2019, реестр программ для ЭВМ.

7. Конкина, А.С. Программный комплекс моделирования дорожного движения на перекрестке: свидетельство № 2019660195 / Конкина А.С. (RU); правообладатель Конкина А.С. – 2019619142; заявл. 25.07.2019; зарегистр. 02.08.2019, реестр программ для ЭВМ.

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 02.07.2020. Формат 60×84 1/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 0,93. Тираж 125 экз. Заказ 208/218.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.