На правах рукописи

КОНДЮКОВ АЛЕКСЕЙ ОЛЕГОВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Челябинск – 2017

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого» в г. Великом Новгороде, на кафедре алгебры и геометрии.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор Сукачева Тамара Геннадьевна

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Кризский Владимир Николаевич,
ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет», Стерлитамакский филиал, зам. директора по научной работе и инновациям;

доктор физико-математических наук,
профессор Маликов Рамиль Фарукович
ФГБОУ ВО «Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы»
кафедра информационных систем и технологий,
зав. научно-исследовательской лабораторией
«Системный анализ и математическое моделирование»

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет (ВГТУ)»

Защита состоится 26 июня 2017 г. в 15:30 на заседании диссертационного совета Д 212.298.14 при Южно-Уральском государственном университете по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, ауд. 1001.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета и на сайте http://www.susu.ru/ru/dissertation/d-21229814/kondyukov-aleksey-olegovich/.

Автореферат разослан 21 апреля 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, доцент А.В. Келлер

Актуальность темы.

Диссертационная работа посвящена исследованию математических моделей несжимаемых вязкоупругих жидкостей Кельвина-Фойгта различных порядков в магнитном поле Земли. Актуальность изучения такого рода моделей обусловлена необходимостью решения важных прикладных задач в магнитогидродинамике и геофизике. Ранее такие математические модели рассматривались в работах Р. Хайда, Д. Хенри, Т. Каулинга, Ф. Чена и других авторов.

Математические модели, которые исследуются в диссертационной работе, основаны на неклассических уравнениях в частных производных, не разрешенных относительно производной по времени. Впервые такие уравнения появились в работе Х. Пуанкаре в 1885 году. Систематическое их изучение началось с работ С.Л. Соболева, выполненных в 40-х годах прошлого столетия. С тех пор возникла традиция эти уравнения называть уравнениями соболевского типа. Исследованию уравнений соболевского типа и их приложений посвящено большое количество работ как российских, так и зарубежных ученых (Г.В. Демиденко, С.В. Успенского, Н.В. Сидорова, М.В. Фалалеева, И.В. Мельниковой, В.Н. Врагова, С.Г. Пяткова, А.И. Кожанова, Г.А. Свиридюка, Т.Г. Сукачевой, В.Е. Федорова, В.Ф. Чистякова, Р.Е. Шоуолтера, А. Фавини, А. Яги).

Диссертационная работа примыкает к направлению, созданному и возглавленному Г.А. Свиридюком, основными методами исследования которого является метод фазового пространства и метод вырожденных (полу)групп операторов.

Обобщенная модель магнитогидродинамики

Система

$$
\begin{gathered}
(1-\varkappa\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v + \sum_{m=1}^{M}\sum_{q=0}^{n_{m-1}} A_{m,q}\nabla^2 w_{m,q} - \frac{1}{\rho}\nabla p - 2\Omega\times v + \\
+\tfrac{1}{\rho\mu}(\nabla\times b)\times b, \\
\frac{\partial w_{m,0}}{\partial t} = v + \alpha_m w_{m,0}, \quad \alpha_m\in\mathbb{R}_-, \quad m=\overline{1,\ M}, \\
\frac{\partial w_{m,q}}{\partial t} = q w_{m,p-1} + \alpha_m w_{m,q}, \quad q=\overline{1,\ n_m-1}, \quad \alpha_m<0, \quad A_{m,q}>0 \\
\nabla\cdot v = 0, \quad \nabla\cdot b = 0, \quad b_t = \delta\nabla^2 b + \nabla\times(v\times b),
\end{gathered}
\tag{1}
$$

моделирует поток несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта высшего порядка $K(K = n_1 + \ldots + n_M)$ в магнитном поле Земли. Здесь вектор-функции $v = (v_1(x,t), v_2(x,t), \ldots, v_n(x,t))$ и $b = (b_1(x,t), b_2(x,t), \ldots, b_n(x,t))$ характеризуют скорость жидкости и магнитную индукцию соответственно, $p = p(x,t)$– давление, $\varkappa$– коэффициент упругости, ν– коэффициент вязкости, Ω – угловая скорость, δ– магнитная вязкость, μ– магнитная проницаемость, ρ– плотность, параметры $A_{m,q}$ определяют время ретардации давления. Система (1) обобщает систему, полученную Р. Хайдом и приведенную Д. Хенри при $\varkappa = 0$.

Рассмотрим начально-краевую задачу для системы (1)

$$\begin{gathered} v(x,0) = v_0(x), \quad w_{m,q}(x,0) = w^0_{m,q}(x), b(x,0) = b_0(x), \quad \forall x \in D, \\ v(x,t) = 0, \quad w_{m,q}(x,t) = 0, b(x,t) = 0, \quad \forall (x,t) \in \partial D \times \mathbb{R}_+, \\ m = \overline{1,\ M}, \quad q = \overline{0,\ n_{m-1}}. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей ∂D класса C^∞.

Аналогично ставятся начально-краевые задачи для систем дифференциальных уравнений несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта нулевого и ненулевого порядка в магнитном поле Земли.

Задача (1), (2) лежит в русле исследований моделей сред Кельвина-Фойгта, начатых А.П. Осколковым, который обобщил знаменитую систему уравнений Навье-Стокса и получил теоремы существования и единственности решения для соответствующих начально-краевых задач.

Все указанные начально-краевые задачи рассматриваются как конкретные интерпретации задачи Коши

$$u(0) = u_0 \tag{3}$$

для полулинейного автономного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + F(u). \tag{4}$$

Здесь $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ – банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, т.е. линеен и непрерывен, причем $\ker L \neq 0$; оператор $M:\ \operatorname{dom} M \to \mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен в $\mathcal{U}$, т.е. $M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, $\mathcal{U}_M = \{u \in \operatorname{dom} M:\ \|u\| = \|Mu\|_{\mathcal{F}} + \|u\|_{\mathcal{U}}\}$, а оператор $F \in C^\infty(\mathcal{U}_M;\mathcal{F})$.

Известно, что, когда оператор L необратим (в частности, когда $kerL \neq 0$), задача (3), (4) разрешима не для любого начального значения $u_0 \in \mathcal{U}$. Поэтому актуальным является поиск таких допустимых начальных значений $u_0 \in \mathcal{U}$, при которых (3), (4) однозначно разрешима. Такой случай возникает при изучении рассматриваемых задач и поэтому представляет несомненый интерес.

Целью работы является исследование математических моделей несжимаемых вязкоупругих жидкостей в магнитном поле Земли на основе теории полулинейных уравнений соболевского типа с последующей реализацией алгоритмов численного решения в виде комплекса программ.

Для достижения данной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Изучить математические модели несжимаемых вязкоупругих жидкостей в магнитном поле Земли с помощью теории полулинейных уравнений соболевского типа. Получить описание фазового пространства, достаточные условия существования и единственности квазистационарных полутраекторий исследуемых моделей.

2. Разработать алгоритм метода численного решения начальной задачи для модели, описывающей течение несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта нулевого порядка в магнитном поле Земли.

3. Реализовать в виде программ для ЭВМ алгоритмы разработанного метода и провести вычислительные эксперименты.

Научная новизна

В области математического моделирования:

Впервые исследованы математические модели, возникающие в геофизике и магнитогидродинамике, на основе теории полулинейных уравнений соболевского типа. Создана теоретическая основа для численного исследования изучаемых моделей: доказаны теоремы об однозначной разрешимости, построены и изучены фазовые пространства.

В области численных методов:

На основе конечно-разностных методов впервые разработан алгоритм численного метода, позволяющий находить приближенные решения начально-краевой задачи для изучаемых полулинейных моделей математической физики.

В области комплексов программ:

Разработанный численный метод реализован в виде программы для нахождения приближенного решения задачи Коши для полулинейной математической модели, позволяющий проводить вычислительные эксперименты для модельных и реальных задач.

Методы исследования.

Основным методом исследования служит метод фазового пространства. Содержание указанного метода составляют различные результаты линейного и нелинейного функционального анализа, в частности, теория относительно $p-$секториальных операторов и аналитических полугрупп операторов, теории дифференцируемых банаховых многообразий.

Кроме того, при разработке алгоритмов численных методов решения используются метод Рунге-Кутты, а также конечно-разностный метод, позволяющий применить алгоритмы к требуемым задачам.

Теоретическая и практическая значимость.

Результаты диссертационного исследования носят как теоретический, так и практический характер. В рамках теоретической значимости впервые проведено описание фазового пространства начальной задачи для различных моделей (нулевого, ненулевого и высшего порядков) динамики несжимаемых вязкоупругих жидкостей в магнитном поле Земли. Диссертационная работа вносит вклад в теорию нелинейных уравнений соболевского типа. Получены необходимые и достаточные условия существования единственного решения для задач Коши-Дирихле для исследуемых моделей.

В рамках практической значимости построен численный метод решения начально-краевой задачи вязкоупругой электропроводной жидкости в магнитном поле Земли. Разработанный алгоритм численного метода реализован в виде программы, с помощью которой были проведены вычислительные эксперименты. В основной программе предусмотрены блоки ввода исходных данных, расчета необходимых параметров процесса и вывода результатов расчета, как в виде таблиц, так и в виде графических отображений. Результаты, полученные при исследовании данных математических моделей, могут быть полезны в геофизике и магнитогидродинамике.

Аппробация работы.

Результаты аппробированы на конференциях: на международной конференции «Математика и информационные технологии в нефтегазовом комплексе», посвященная дню рождения великого русского математика академика П.Л. Чебышева. (Сургут, 2014, 2016), на IV Международной школе-семинаре «Нелинейный анализ и экстремальные задачи». (Иркутск, 2014), на международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам.(Суздаль, 2014), на XV Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике. (Сочи. Дагомыс. 2014, 2015), на Международном симпозиуме «Вырожденные полугруппы и пропагаторы уравнений соболевского типа» (СимВП -2014). (Челябинск, 2014), на всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова (Ижевск, 2015), на XVI Всероссийском Симпозиуме по прикладной и промышленной математике, летняя сессия, (Челябинск,2015), на III всероссийской научно-практической конференции «Южно-Уральская молодежная школа по математическому моделированию» (Челябинск, 2016), на XXIX международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях» (Санкт-Петербург, 2016), результаты докладывались и обсуждались на семинарах профессора Е.Ю. Панова в Новгородском государственном университете имени Ярослава Мудрого, профессора Г.А. Свиридюка «Уравнения соболевского типа» в Южно-Уральском государственном университете (национальном исследовательском университете), г. Челябинск.

Работа поддержана Министерством Образования и Науки Российской Федерации (государственное задание № 1.857.2014/К).

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в 16 научных работах, в их числе: 4 статьи [1-4] представлены в рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки РФ для опубликования результатов диссертационных исследований, в том числе 1 статья [4] – в издании, индексируемом базой данных Web os Science, 3 статьи [1-3] – в изданиях, индексируемых базой данных Scopus; 3 статьи [1, 6, 7] – в изданиях, индексируемых базой данных Zentralblatt Math. Кроме того, имеется свидетельство о регистрации программы [5], с использованием которой проводились вычислительные эксперименты. Список работ приводится в конце автореферата. Из работ [1-6, 8-13], выполненных в соавторстве, в диссертацию вошли только результаты, полученные автором лично.

Структура и объем работы.

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 114 страниц. Библиография содержит 112 наименований работ отечественных и зарубежных авторов, включая работы автора.

Краткое изложение содержания диссертации.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, определяется цель работы, обсуждается историография вопроса, излагается краткое содержание диссертации.

Первая глава состоит из двух параграфов. Она посвящена исследованию полулинейных математических моделей соболевского типа и носит вспомогательный характер. Первый параграф содержит основные сведения, с опорой на которые получены основные результаты работы. Во втором параграфе приводятся результаты о разрешимости задачи Коши для полулинейного автономного уравнения соболевского типа.

Во **второй главе**, содержащей три параграфа, изучаются модели несжимаемых вязкоупругих жидкостей Кельвина–Фойгта различных порядков в магнитном поле Земли. Во всех этих моделях оператор M является $(L, 1)-$ секториальным.

В первом параграфе исследуется задача (1), (2), которая редуцируется к задаче (3), (4). Введем, следуя пространства $\mathbf{H}^2_\sigma$, $\mathbf{H}^2_\pi$, $\mathbf{H}_\sigma$ и $\mathbf{H}_\pi$. Здесь $\mathbf{H}^2_\sigma$ и $\mathbf{H}_\sigma$ – подпространства соленоидальных функций в пространствах $(W^2_2(D))^n \cap (\overset{\circ}{W}{}^1_2(D))^n$ и $(L_2(D))^n$ соответственно, а $\mathbf{H}^2_\pi$ и $\mathbf{H}_\pi$ – их ортогональные (в смысле $(L_2(D))^n$) дополнения. Через Σ обозначим ортопроектор на $\mathbf{H}_\sigma$, причем его сужение на пространство $(W^2_2(D))^n \cap (\overset{\circ}{W}{}^1_2(D))^n$ будем также обозначать через Σ. Положим $\Pi = I - \Sigma$. Равенством $A = \nabla^2 E_n : \ \mathbf{H}^2_\sigma \oplus \mathbf{H}^2_\pi \to \mathbf{H}_\sigma \oplus \mathbf{H}_\pi$, где E_n – единичная матрица порядка n, зададим линейный непрерывный оператор с дискретным конечнократным спектром $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, сгущающимся лишь на $-\infty$. Формулой $B_v : \ v \to \nabla(\nabla \cdot v)(B_b : \ b \to \nabla(\nabla \cdot b))$ зададим линейный непрерывный сюръективный оператор $B_v(B_b) : \ \mathbf{H}^2_\sigma \oplus \mathbf{H}^2_\pi \to \mathbf{H}_\pi$ с ядром $\ker B_v = B_b = \mathbf{H}^2_\sigma$. Используя естественный изоморфизм прямой суммы и декартова произведения банаховых пространств, введем в рассмотрение пространства $\mathcal{U}_{10} = \mathbf{H}^2_\sigma \times \mathbf{H}^2_\pi \times \mathbf{H}_p$, $\mathcal{F}_{10} = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \mathbf{H}_p$, где $\mathbf{H}_p = \mathbf{H}_\pi$; $\mathcal{U}_{1i} = \mathbf{H}^2 \cap \overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1 = \mathbf{H}^2_\sigma \times \mathbf{H}^2_\pi$, и $\mathcal{F}_{1i} = \mathbf{L}_2 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi$, $i = \overline{1, \ k}$. Тогда пространства $\mathcal{U}_1 = \oplus^k_{l=0} \mathcal{U}_{1l}$, $\mathcal{F}_1 = \oplus^k_{l=0} \mathcal{F}_{1l}$.

Операторы A_1 и $B_1 : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{F}_1$ определены формулами $A_1 = \operatorname{diag}[\hat{A}_1 \ , E_k]$, где

$$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} \check{A}_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \check{A}_1 = \begin{pmatrix} \Sigma(I-\lambda A)\Sigma & \Sigma A(I-\lambda A)\Pi \\ \Pi(I-\lambda A)\Sigma & \Pi A(I-\lambda A)\Pi \end{pmatrix}.$$

Оператор $B_1 : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{F}_1$ положим равным $\widetilde{M}$.

Замечание 1 Обозначим через A_σ сужение оператора ΣA на $\mathbf{H}^2_\sigma$. Согласно теореме Солонникова–Воровича–Юдовича, спектр $\sigma(A_\sigma)$ вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается лишь на $-\infty$.

Далее положим $\mathcal{U}_2 = \mathcal{F}_2 = L_2(D)$ и равенством $B_2 = \delta\nabla^2 : \ \operatorname{dom} B_2 \to \mathcal{F}_2$ определим линейный замкнутый и плотно определенный оператор B_2, $\operatorname{dom} B_2 = W_2^2(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$.

Положим $A_2 \equiv I$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. Вектор u пространства $\mathcal{U}$ имеет вид $u = col(u_\sigma, u_\pi, u_p, w_1, \ldots, w_k, u_b)$, где $col(u_\sigma, u_\pi, u_p, w_1, \ldots, w_k) \in \mathcal{U}_1$, а $u_b \in \mathcal{U}_2$, $u_b = (b_\sigma, b_\pi)$, $b_\sigma \in \mathbf{H}^2_\sigma$, $b_\pi \in \mathbf{H}^2_\pi$. Аналогичный вид имеет вектор $f \in \mathcal{F}$. Операторы L и M определим равенствами $L = A_1 \otimes A_2$ и $M = B_1 \otimes B_2$. Оператор L принадлежит $\mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, а оператор $M : \ \operatorname{dom} M \to \mathcal{F}$ линеен, замкнут и плотно определен, $\operatorname{dom} M = \mathcal{U}_1 \times \operatorname{dom} B_2$.

Теорема 1 *Пусть $\varkappa^{-1} \notin \sigma(A) \cup \sigma(A_\sigma)$. Тогда для любых u_0, таких, что $u_0 \in \mathfrak{M}$, при некотором $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственная квазистационарная полутраектория $u = (u_\sigma, 0, u_p, u_b)$, являющаяся решением задачи* (1), (2), *причем $u(t) \in \mathfrak{M}$ при всех $t \in (0, T)$.*

Здесь $\mathfrak{M} = \{u \in \mathcal{U}_M : \ u_\pi = 0, \ b_\pi = 0, \ u_p = \Pi(\nu A_\sigma - (u_\sigma \cdot \nabla)u_\sigma + \sum\limits_{m=1}^{M} \sum\limits_{q=0}^{n_{m-1}} A_{m,q}\nabla^2 w_{m,q} - 2\Omega \times u_\sigma + (\nabla \times b_\sigma) \times b_\sigma)\}$– фазовое пространство рассматриваемой задачи.

Во втором параграфе рассматривается начально-краевая задача для системы уравнений

$$\begin{gathered} (1-\varkappa\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v + \sum_{l=1}^{K}\beta_l\nabla^2 w_l - \frac{1}{\rho}\nabla p - 2\Omega\times v + \frac{1}{\rho\mu}(\nabla\times b)\times b, \\ \frac{\partial w_l}{\partial t} = v + \alpha_l w_l, \quad \alpha_l \in \mathbb{R}_-, \quad \beta_l \in \mathbb{R}_+, \quad l = \overline{1, \ K}, \\ \nabla\cdot v = 0, \quad \nabla\cdot b = 0, \quad b_t = \delta\nabla^2 b + \nabla\times(v\times b), \end{gathered} \tag{5}$$

моделирующей поток несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта ненулевого порядка K в магнитном поле Земли. Здесь вектор-функцииv = $(v_1(x,t), v_2(x,t), \ldots, v_n(x,t))$ и $b = (b_1(x,t), b_2(x,t), \ldots, b_n(x,t))$ характеризуют скорость жидкости и магнитную индукцию соответственно, $p = p(x,t)$ – давление, $\varkappa$ – коэффициент упругости, ν – коэффициент вязкости, Ω – угловая скорость, δ – магнитная вязкость, μ – магнитная проницаемость, ρ – плотность, параметры $\beta_l, \quad l = \overline{1,\ K}$ – определяют время ретардации (запаздывания) давления.

Редукция к задаче (3), (4) производится так же, как для математической модели из первого параграфа. Доказывается теорема о существовании единственного решения этой задачи, являющегося квазистационарной полутраекторией. Описывается фазовое пространство.

В третьем параграфе для системы нулевого порядка

$$\begin{gathered}(1-\varkappa\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v - \nabla p - 2\Omega\times v + (\nabla\times b)\times b,\\ \nabla\cdot v = 0, \quad \nabla\cdot b = 0, \quad b_t = \delta\nabla^2 b + \nabla\times(v\times b),\end{gathered} \tag{6}$$

рассматривается начально-краевая задача

$$\begin{gathered}v(x,0) = v_0(x), \quad b(x,0) = b_0(x), \quad x\in D,\\ v(x,t) = 0, \quad b(x,t) = 0, \quad (x,t)\in\partial D\times\mathbb{R}_+,\end{gathered} \tag{7}$$

моделирующая поток несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта.

Третья глава состоит из трех параграфов и посвящена численному исследованию модели, описывающей течение несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта нулевого порядка в магнитном поле Земли.

В первом параграфе проводится редукция модели Кельвина–Фойгта нулевого порядка к задаче Коши для системы ОДУ с использованием процесса дискретизации конечно-разностным методом и описывается алгоритм численного исследования математической модели течения вязкоупругой электропроводной жидкости в магнитном поле. Алгоритм численного решения задачи (6), (7) сводится к следующим этапам.

Этап 1. Вводя вспомогательные вектор-функции ψ и A, с помощью векторно-дифференциальной операции rot исключить гидродинамическое давление жидкости p из системы дифференциальных уравнений в частных производных (6). В результате прийти к редуцированной эквивалентной начально-краевой задаче.

Этап 2. Используя процесс дискретизации конечно-разностным методом, преобразовать полученную на первом этапе систему дифференциальных уравнений в частных производных в систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) по времени. Провести дискретизацию граничных условий и получить задачу Коши для системы ОДУ.

Этап 3. Получить приближенное решение задачи Коши для системы ОДУ, используя явные одношаговые формулы типа Рунге – Кутты.

Во втором параграфе приводится описание программы, реализующей разработанный численный метод. Описывается функциональное назначение и логическая структура программы.

В третьем параграфе представлены результаты вычислительного эксперимента по нахождению скорости течения электропроводной жидкости и индуцированного магнитного поля. Результаты приведены в табличном виде по радиальной, трансверсальной и осевой составляющим индукции магнитного поля и скорости течения жидкости при следующих значениях параметров задачи $\chi = 2,7$ м/с^2, $\nu = 0,00328$ м^2/с, $\mu = 1$, $\rho = 1000$ кг/м^3, $\delta = 0,1$ м^2/с, $r_0 = 0,1$ м, $z_0 = 0,2$ м. На рисунках 1-6 представлены соответствующие графики компонент решения.

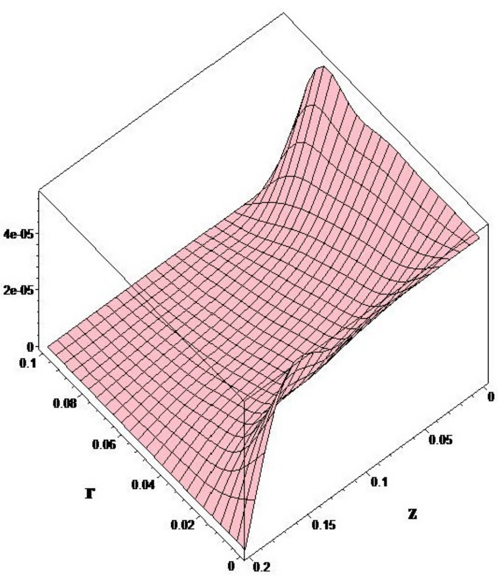

Рис. 1. График поверхности радиальной составляющей индукции магнитного поля $b_r = b_r(r, z, t_*)$ (Тл) в момент времени $t_* = 3$ с.

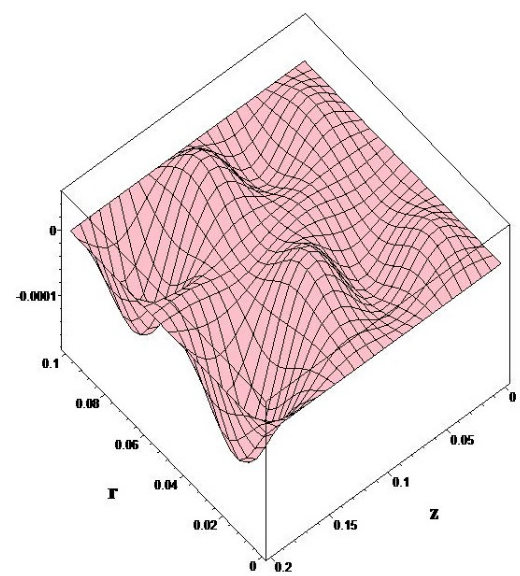

Рис. 2. График поверхности радиальной составляющей скорости течения жидкости $v_r = v_r(r, z, t_*)$ (м/с) в момент времени $t_* = 3$ с.

Проведенные вычислительные эксперименты показали вычислительную устойчивость разработанного алгоритма численного решения начально – краевой задачи (6) – (7).

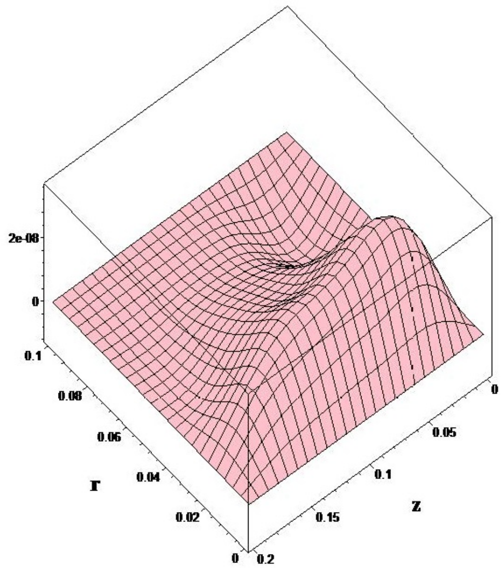

Рис. 3. График поверхности трансверсальной составляющей индукции магнитного поля $b_\varphi = b_\varphi(r, z, t_*)$ (Тл) в момент времени $t_* = 3$ с.

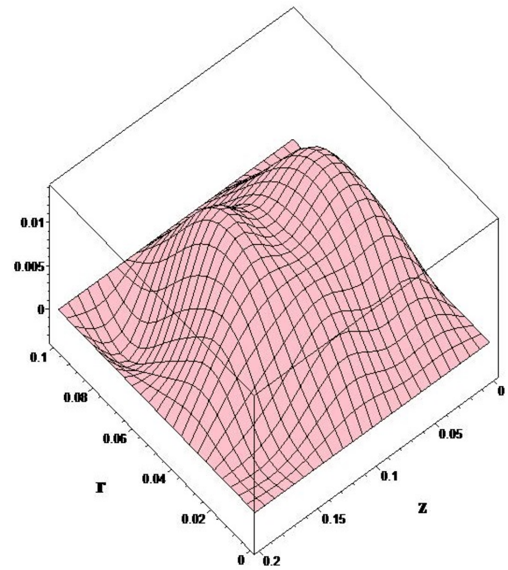

Рис. 4. График поверхности трансверсальной составляющей скорости течения жидкости $v_\varphi = v_\varphi(r, z, t_*)$ (м/с) в момент времени $t_* = 3$ с.

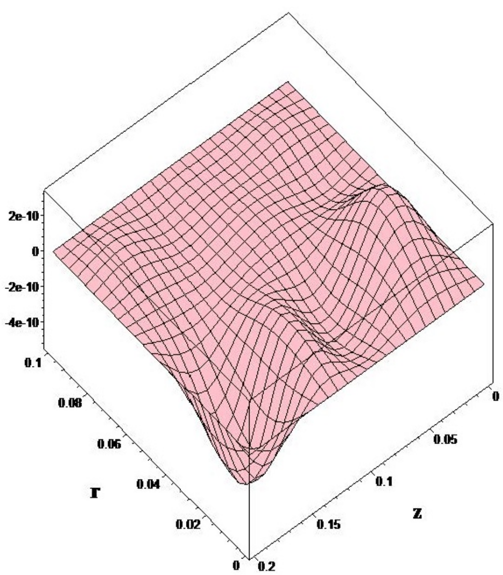

Рис. 5. График поверхности осевой составляющей индукции магнитного поля $b_z = b_z(r, z, t_*)$ (Тл) в момент времени $t_* = 3$ с.

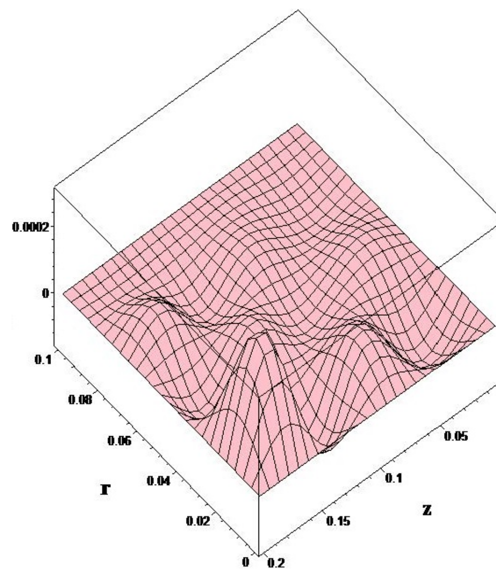

Рис. 6. График поверхности осевой составляющей скорости течения жидкости $v_z = v_z(r, z, t_*)$ (м/с) в момент времени $t_* = 3$ с.

В заключении представлены выводы по результатам исследований, обосновывается соответствие работы паспорту специальности 05.13.18, содержатся рекомендации по использованию научных выводов.

Результаты, выносимые на защиту:

В рамках развития качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей получены:

–Достаточные условия однозначной разрешимости задачи Коши для обобщенной модели динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта ненулевого порядка в магнитном поле Земли, получено описание фазового пространства;

– Достаточные условия однозначной разрешимости задачи Коши для модели динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости ненулевого порядка Кельвина – Фойгта в магнитном поле Земли, получено описание фазового пространства;

– Достаточные условия однозначной разрешимости задачи Коши для модели динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости нулевого порядка Кельвина – Фойгта в магнитном поле Земли, получено описание фазового пространства;

В рамках разработки, обоснования и тестирования эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий:

– Алгоритм численного решения начально-краевой задачи для системы, моделирующей динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина – Фойгта нулевого порядка в магнитном поле Земли;

В рамках реализации эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента:

– Программа для персональных компьтеров нахождения численного решения начально-краевой задачи для системы, моделирующей динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта нулевого порядка в магнитном поле Земли.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки РФ для опубликования результатов диссертационного исследования:

1. Kondyukov, A.O. On a Class of Sobolev type Equations/ T.G. Sukacheva, A.O. Kondyukov // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 4. – С. 5–21. (Scopus)

2. Кондюков, А.О. Фазовое пространство одной задачи магнитогидродинамики / Т.Г. Сукачева , А.О. Кондюков // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 4. – С. 495–501. (Scopus)

3. Кондюков, А.О. Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова ненулевого порядка / А.О. Кондюков, Т.Г. Сукачева // Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики. – 2015. – Т. 55, № 5. – С. 823–829. (Scopus)

4. Kondyukov, A.O. Computational Experiment for a Class of Mathematical Models of Magnetohydrodynamics / A.O. Kondyukov, T.G. Sukacheva, S.I. Kadchenko, L.S. Ryazanova // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2017. – Т. 10, № 1. – С. 149–155. (WoS)

Свидетельство о регистрации программы:

5. Численное моделирование течения вязкоупругой электропроводной жидкости в магнитном поле: свидетельство № 2016619268 / Кондюков А.О., Кадченко С.И., Какушкин С.Н. (RU); правообладатель: ФГБОУ ВО «Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого». – 2016613974; заявл. 21.04.2016, зарегистр. 17.08.2016, реестр программ для ЭВМ.

Другие научные публикации:

6. Kondyukov, A.O. Numerical study of a flow of viscoelastic fluid of Kelvin-Voigt having zero order in a magnetic field / S.I. Kadchenko, A.O. Kondyukov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2016. – V. 3, № 2. – P. 40–47. (Zentralblatt Math)

7. Кондюков, А.О. Обобщенная модель несжимаемой вязкоупругой жидкости в магнитном поле Земли / А.О. Кондюков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2016. – Т. 8, № 3. – С. 13–21. (Zentralblatt Math)

8. Кондюков, А.О. Об одной модели магнитогидродинамики / Т.Г. Сукачева, А.О. Кондюков // Международная конференция «Математика и информационные технологии в нефтегазовом комплексе», посвященная дню рождения

великого русского математика академика П.Л. Чебышева. Сургут (14–18 мая 2014 г.): тезисы докладов. – Сургут. — 2014. – С. 69–70.

9. Кондюков, А.О. Фазовое пространство одной модели магнитогидродинамики / Т.Г. Сукачева, А.О. Кондюков // IV Международная школа-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи». Иркутск. – 2014. – С. 30.

10. Кондюков, А.О. Квазистационарные полутраектории в одной модели магнитогидродинамики / Т.Г. Сукачева, А.О. Кондюков //Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль (4–9 июля 2014 г.): тезисы докладов. – Владимир. – С. 91–92.

11. Кондюков, А.О. Об одной модели несжимаемой вязкоупругой жидкости в магнитном поле Земли / Т.Г. Сукачева, А.О. Кондюков // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2014. – Т. 21, № 4. – С. 395–397.

12. Кондюков, А.О. О фазовом пространстве модели магнитогидродинамики ненулевого порядка / Т.Г. Сукачева, А.О. Кондюков // Теория управления и математическое моделирование: Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова (Ижевск, Россия, 9–11 июня 2015 г). – Ижевск: Изд-во Удмуртский университет. – 2015. – С. 305–307.

13. Кондюков, А.О. Об одной модели магнитогидродинамики ненулевого порядка / Т.Г. Сукачева, А.О. Кондюков // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2015. – Т. 22, № 1. – С. 75.

14. Кондюков, А.О. Об одной обобщенной модели магнитогидродинамики / А.О. Кондюков // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ. – 2016. – № 1 (83). – С. 14–15.

15. Кондюков, А.О. Квазистационарные полутраектории для обобщенной модели магнитогидродинамики / А.О. Кондюков // Международная конференция. Математика и информационные технологии в нефтегазовом комплексе, посвященная дню рождения великого русского математика академика П.Л. Чебышева (Сургут, 16 – 20 мая 2016 г.): тезисы докладов – Сургут: ИЦ СурГУ. – 2016. – С. 47–48.

16. Кондюков, А.О. Об одной вырожденной модели магнитогидродинамики ненулевого порядка / А.О. Кондюков // Южно-Уральская молодежная школа по математическому моделированию: сборник трудов III всероссийской научно-практической конференции. / (Челябинск, 28-29 апреля 2016 г.). – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ. – 2016. – С. 83–90.

Типография "Два комсомольца"

Подписано в печать 18.04.17. Формат 60x84 1/16.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 1,87. Уч.-изд. л. 2.
Тираж 100 экз. Заказ 142/456

Отпечатано в типографии "Два комсомольца".
454008, г. Челябинск, Комсомольский пр., 2