На правах рукописи

Худяков Юрий Владимирович

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОПТИМАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ С УЧЕТОМ ПОМЕХ

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

ЧЕЛЯБИНСК – 2018

Работа выполнена в Южно-Уральском государственном университете (национальном исследовательском университете).

Научный руководитель:

доктор технических наук, профессор
Шестаков Александр Леонидович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Гликлих Юрий Евгеньевич,
Воронежский государственный университет,
кафедра алгебры и топологических методов анализа, профессор;

доктор физико-математических наук,
профессор Кризский Владимир Николаевич,
Башкирский государственный университет,
Стерлитамакский филиал,
кафедра математического моделирования, профессор.

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет».

Защита состоится 25 июня 2018 года в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.298.14 при Южно-Уральском государственном университете, по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, ауд. 1001.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета, а также на сайте
https://www.susu.ru/dissertation/d212-298-14

Автореферат разослан «20 » апреля 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, доцент А.В. Келлер

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В различных областях научной и практической деятельности усиливаются требования к качеству измерений исследумых процессов на основе наблюдений (в метрологии[1], энергетике, геофизике[2] и др.). В теории динамических измерений высокая стоимость натурных измерений актуализирует теоретические и прикладные исследования. Несмотря на то, что первая работа в области динамических измерений была написана в 1909 году А.Н. Крыловым, становление теории динамических измерений как специального раздела метрологии началось в России в конце 70-х годов прошлого века. Методы восстановления динамически искаженного сигнала на основе регуляризации А.Н. Тихонова приводили к использованию обратного преобразования Фурье, именно такие подходы представлены в работах Г.И. Василенко, Г.Н. Солопченко, О.В. Гулинского. Методы восстановления динамически искаженного сигналана на основе численного решения интегрального уравнения свертки рассмотрены в работах А.Ф. Верланя, В.С. Сизикова.

В рамках теории динамических измерений (ДИ) В.А. Грановский[3] выделяет три основные задачи — одну прямую и две обратные. Вторая обратная задача ДИ – наиболее сложная – состоит в восстановлении входного воздействия по известным динамическим свойствам измерительного устройства (ИУ) и его отклику на искомое воздействие. Исследованием второй обратной задачи ДИ, используя различные подходы, занимались В.А. Грановский, П. Деруссо, Н.Т. Кузовков, B.R. Fernandes, K.J. Hedrick, Г.Л. Литвинов, А.Л. Шестаков и др.

Развитие теории уравнений соболевского типа, методов теории вырожденных (полу)групп операторов и оптимального управления для уравнений соболевского типа и систем леонтьевского типа позволили начать численные исследования прикладных задач. Уравнения соболевского типа и их приложения исследовали С.Л. Соболев, В.Н. Врагов, Г.В. Демиденко, А.И. Кожанов, С.Г. Пятков, И.В. Мельникова, А.Г. Свешников, М.О. Корпусов, Ю.Е. Гликлих, Н.А. Сидоров, R.Showalter, A.Favini, Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева, А.А. Замышляева, С.А. Загребина, В.Е. Федоров, J.H.A. Lightbourne и др. Дескрип-

[1]Шестаков, А.Л. Методы теории автоматического управления в динамических измерениях. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ. – 2013.

[2]Кризский, В. Н. Математическое моделирование и оптимизация обратных задач определения геоэлектрических параметров кусочно-однородных сред // Математическое моделирование. – 2000. – Т. 12, № 3.

[3]Грановский, В.А. Динамические измерения: Основы метрологического обеспечения. – Л.: Энергоиздат. Ленингр. отделение, 1984.

торные системы исследовали Ю.Е. Бояринцев, В.Ф. Чистяков, М.В. Булатов, А.А. Щеглова, Guang-Ren Duan, А.П. Курдюков, А.А. Белов и др. Задачи оптимального управления для уравнений соболевского типа исследовались Г.А. Свиридюком, А.А. Ефремовым, Г.А. Куриной, Н.А. Манаковой, М.В. Плехановой и др. Численные исследования начальных задач и задач оптимального управления для дескрипторных систем, систем леонтьевского типа проводились E. Hairer, P.C. Müller, Г.А. Свиридюком, А.В. Келлер, М.В. Булатовым и др. В диссертации используются методы, развиваемые в челябинской научной школе по уравнениям соболевского типа[4]. В настоящее время активно изучаются стохастические уравнения соболевского и леонтьевского типов. Здесь отметим работы И.В. Мельниковой, Ю.Е. Гликлиха, Ю.Е. Машкова, Г.А. Свиридюка, А.А. Замышляевой, С.А. Загребиной, Н.А. Манаковой, однако для прикладных исследований, в том числе для развития теории оптимальных динамических измерений, значимым стало получение производных в среднем для стохастических процессов[5].

Результатом совместных междисциплинарных исследований А.Л. Шестакова и Г.А. Свиридюка стал новый подход к восстановлению динамически искаженных сигналов. В качестве модели ИУ рассматривается система леонтьевского типа с начальным условием Шоуолтера–Сидорова, а для достижения близости значений виртуальных (получаемых при работе с математической моделью ИУ) наблюдений и наблюдений реального датчика применены методы теории оптимального управления. Входящий сигнал модели является решением математической задачи оптимального управления, а получаемое при этом оптимальное динамическое измерение наболее точно отражает входящий сигнал датчика. Численное исследование задач оптимального динамического измерения с учетом только инерционности ИУ проведено Е.И. Назаровой и А.В. Келлер.

При изучении ДИ необходимо учитывать как собственные динамические свойства объектов, так и параметры внешних возмущений, помех при измерении и наблюдении. Таким образом, актуальным является разработка численных методов и алгоритмов программ для исследования математических моделей оптимальных динамических измерений с учетом детерминированных помех.

---

[4]Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht - Boston - Tokyo - Köln: VSP, 2003.

[5]Гликлих, Ю.Е. Изучение уравнений леонтьевского типа с белым шумом методами производных в среднем случайных процессов// Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2012. № 27.

Постановка задачи. Пусть L и A – квадратные матрицы порядка n (при моделировании может быть получен случай, когда $\det L = 0$), матрица A – (L,p)-регулярна, $u : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$, система уравнений

$$\begin{cases} L\dot{x} = Ax + Bu + G\varsigma, \\ \quad y = Cx + D\eta \end{cases} \qquad (1)$$

описывает ИУ, где $x(t)$ – вектор-функция его состояния, $\dot{x}(t)$ – вектор-функция скорости изменения состояния соответственно; $y(t)$ – вектор-функция наблюдений; L – матрица взаимовлияния скоростей состояния ИУ, A – матрица состояний ИУ; матрица B характеризует взаимосвязи и влияние измерения на состояние ИУ; матрица G характеризует влияние помех на состояние ИУ и их взаимосвязи; матрица C характеризует связь между состоянием ИУ и наблюдением; матрица D характеризует влияние и взаимосвязи помех на выходе ИУ ; $u(t)$ – вектор-функция измерения; $\eta(t)$ и $\varsigma(t)$ – вектор-функции помех на выходе и в цепях ИУ соответственно.

Начальное условие Шоуолтера–Сидорова

$$\left[(\alpha L - A)^{-1} L\right]^{p+1}(x(0) - x_0) = 0 \qquad (2)$$

при некоторых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \rho^L(A)$ отражает начальное состояние ИУ.

Рассматривая задачу ДИ на промежутке $[0,\tau]$ введем в рассмотрение *пространство состояний* $\chi = \{x \in L_2((0,\tau),\mathbb{R}^n) : \dot{x} \in L_2((0,\tau),\mathbb{R}^n)\}$, *пространство измерений* $\mathfrak{U} = \left\{u \in L_2((0,\tau),\mathbb{R}^n) : u^{(p+1)} \in L_2((0,\tau),\mathbb{R}^n)\right\}$ и *пространство наблюдений* $\mathfrak{Y} = C[\chi]$. При наличии детерминированных помех на выходе ИУ функционал штрафа имеет вид

$$J(u) = \sum_{q=0}^{1} \int_0^{\tau} \left\| Sy^{(q)}(u,t) - Sy_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt, \qquad (3)$$

а при наличии детерминированных помех на входе и выходе ИУ

$$J(u) = \alpha \sum_{q=0}^{1} \int_0^{\tau} \left\| S(x^{(q)}(u,\varsigma,t)) - \left(Sy_0^{(q)}(t) - S\overline{y}_0^{(q)}(t)\right) \right\|^2 dt +$$
$$+\beta \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^{\tau} \langle F_q(u+\varsigma)^{(q)}(t), (u+\varsigma)^{(q)}(t) \rangle dt, \qquad (4)$$

где $y_0(t) = col(y_{01}(t), y_{02}(t), \ldots, y_{0r}(t))$ – наблюдения, получаемые в ходе натурного эксперимента, $Sy_0(t)$ – те наблюдения, по которым проводится восстановления динамически искаженного сигнала; $y(t)$ – виртуальные наблюдения, получаемые в ходе математического моделирования процесса восстановления динамически искаженных сигналов, $Sy(t)$ – те виртуальные наблюдения, по которым восстанавливаются динамически искаженные измерения; $\overline{y}_0(t)$ – наблюдения, получаемые в ходе натурного эксперимента при нулевых значениях измеряемых сигналов, $S\overline{y}(t)$ – те наблюдения (при нулевых значениях измеряемых сигналов), по которым проводится восстановление сигнала. Коэффициенты $\alpha \in (0, 1]$, $\beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha + \beta = 1$, F_q – симметричные неотрицательно определенные матрицы порядка n, $||\cdot||$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидовы норма и скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Вид функционала штрафа в моделях оптимального динамического измерения основывается, прежде всего, на обеспечении достижения близости значений виртуальных и реальных наблюдений, так как в этом случае виртуальные и реальные измерения на входе будут также незначительно различаться.

Отметим, что $\mathfrak{Y}$ изоморфно некоторому подпространству в χ, хотя не всегда $\mathfrak{Y} = \chi$. Определим в $\mathfrak{U}$ множество допустимых измерений $\mathfrak{U}_\partial$, являющееся компактным выпуклым подмножеством. В качестве $\mathfrak{U}_\partial$ примем

$$\mathfrak{U}_\partial = \{u \in \mathfrak{U} : \sum_{q=0}^{\theta} \int_0^{\tau} \left\| u^{(q)}(t) \right\|^2 dt \leq d\}, \tag{5}$$

где $d = const$.

Поставим задачу оптимального динамического измерения с учетом детерминированных помех и инерционности ИУ: найти вектор-функцию измерения $v \in \mathfrak{U}_\partial$, минимизирующую значение функционала штрафа (0.3) (или (0.4)), т.е.

$$J(v) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\partial} J(u), \tag{6}$$

при этом $x(v) \in \chi$ удовлетворяет системе (0.1) почти всюду на $(0, \tau)$ и при некоторых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \rho^L(M)$ – условию Шоуолтера–Сидорова (0.2)

Целью работы является численное исследование класса математических моделей оптимального динамического измерения с детерминированными помехами с разработкой численных алгоритмов и их реализацией в виде программного комплекса.

Для достижения данной цели необходимо реализовать следующие задачи:

1. Разработать методику представления математической модели сложной измерительной системы в виде системы леонтьевского типа.

2. Провести аналитическое исследование ряда математических моделей оптимального динамического измерения, позволяющих рассмотреть различные

случаи детермированных помех в технических и экономических задачах динамических измерений.

3. Разработать численный метод решения задачи оптимального динамического измерения с учетом инерционности измерительного устройства и детерминированных помех.

4. Реализовать предложенный численный метод в виде программного комлекса с использованием алгоритма распараллеливания.

5. Провести вычислительные эксперименты для подтверждения эффективности предложенных методов и алгоритмов.

Научная новизна полученных результатов.

В области математического моделирования: В диссертационном исследовании впервые: предложена методика представления математической модели сложной измерительной системы, содержащей несколько ИУ, в виде системы леонтьевского типа, что позволяет учитывать связи между устройствами в виде алгебраических уравнений; проведено исследование математической модели оптимального динамического измерения с инерционностью и резонансными помехами на выходе ИУ, математической модели оптимального динамического измерения с инерционностью и детерминированными помехами при известной форме функции измеряемой величины, математической модели оптимального динамического измерения с инерционностью и резонансными помехами на выходе и в цепях ИУ, проведено исследование потребительского потока на основе балансовой модели предприятия и оптимальных динамических измерений продаж. Исследована разрешимость задач оптимальных измерений в рамках исследования указанных математических моделей. Показано значение множества допустимых измерений в математической модели оптимального динамического измерения.

В области численных методов: Модифицированы численные методы решения задач оптимального управления для систем леонтьевского типа: приближенное оптимальное динамическое измерение находится в виде тригонометрических полиномов, в связи с этим переработаны все процедуры численного метода; введено новое условие критерия останова алгоритма, связанное со множеством допустимых измерений, при этом допускается использование ограничений множества допустимых измерений на различных временных промежутках в пределах основного интервала измерений. Показана сходимость модифицированного численного метода решения задачи оптимального динамического измерения с учетом инерционности и резонансов в цепях ИУ.

В области комплекса программ: разработан программный комплекс, позволяющий: проводить вычислительные эксперименты как на модельных так и реальных данных; применять указанные модели; использованы методы параллельных вычислений в процедуре поиска оптимального измерения.

Методы исследования. В работе используются следующие методы исследования: моделирование с использованием системного подхода, математический или абстрактно-логический, эмпирический с использованием проектного подхода и вычислительных экспериментов. В диссертации используются методы теории динамических измерений, теории вырожденных (полу)групп и оптимального управления для уравнений соболевского типа и систем леонтьевского типа, численные методы решения задач жесткого и оптимального управления для систем леонтьевского типа, методы покоординатного спуска с памятью, методы распараллеливания вычислений.

Теоретическая и практическая значимость. Значимость диссертационного исследования обусловлена решением актуальных задач динамических измерений с применением современного математического аппарата. Полученные результаты развивают теории оптимальных динамических измерений, уравнений соболевского типа, оптимального управления и межотраслевого баланса. Разработанные численные методы позволяют применять распараллеливание вычислений, что создает основу для дальнейшего развития моделирования в технике и экономике на основе решения задач динамического измерения. Результаты исследования значимы в рамках решения проблем восстановления динамически искаженных сигналов. Показано, что при моделировании сложных измерительных систем, может быть получена дескрипторная система с постоянными коэффициентами – система леонтьевского типа. Это позволяет расширить применимость разработанных методов как при конструировании различных сложных датчиков и измерительных систем, так и при их калибровке и корректировке. Представленные результаты вычислительных экспериментов свидетельствуют об адекватности проведенного математического моделирования и эффективности выбранного численного метода решения задач оптимального динамического измерения с учетом инерционности и помех различной природы, что создает основу для дальнейшего развития численных исследований моделей динамических систем. Предложенный алгоритм позволил повысить эффективность программы по количеству затрачиваемого на поиск решения машинного времени по сравнению с ранее используемыми, при этом показана сходимость приближенных решений к точному.

Апробация работы. Результаты, изложенные в диссертации, были представлены на Международных научно-практических конференциях «Измерения: состояние, перспективы развития» (Челябинск, 2012) и «Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений» (Новосибирск, 2013), Международной летней математической школе памяти В.А. Плотникова (Одесса, Украина, 2013), Международной конференции «Полугруппы операторов: теория и приложения» (Бедлево, Польша, 2013), XII Всероссийском совещании по проблемам управления (Москва, 2014), Национальном научном симпозиуме с международным участием «Метрология и метрологическое обеспечение» (Созополь, Болгария, 2014). Результаты докладывались на семинарах «Уравнения соболевского типа» профессора Г. А. Свиридюка в Южно-Уральском государственном университете (г. Челябинск).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 14 работ [1] – [14], в т.ч. 2 статьи в издании, индексируемых в Scopus и WoS [5], [6], 4 статьи в ведущих российских рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ [1] – [4], свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [7]. В совместных с научным руководителем работах научному руководителю принадлежит постановка задачи, в диссертацию вошли результаты, полученные ее автором лично.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Объем диссертации составляет 125 страниц. Список литературы содержит 136 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во **Введении** диссертации представлена постановка задачи исследования, определяются цель и задачи работы, обосновывается актуальность, теоретическая и практическая значимость проведенного исследования, определяются методы исследования и новизна полученных результатов, дана характеристика степени разработанности проблемы и степени достоверности результатов, представлена апробация результатов.

Первая глава состоит из семи параграфов и содержит основы теории оптимальных динамических измерений, приведенные результаты не принадлежат автору и не выносятся на защиту. В **п. 1.1** содержатся определения и теоремы об относительно p-ограниченных операторах. В **п. 1.2** приведены сведения об относительно p-регулярных матрицах.

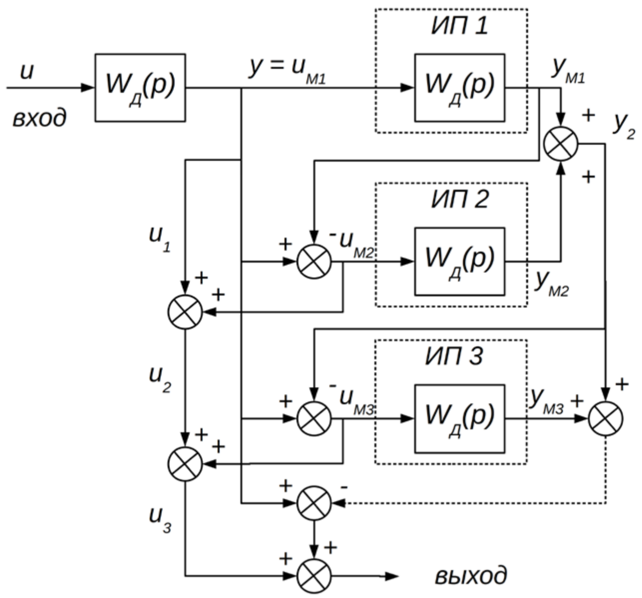
Определение 1. Матрица A называется (L,p)*–регулярной*, если существует число $\alpha \in \mathbb{C}$ такое, что $\det(\alpha L - A) \neq 0$, при этом существует число $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ равное нулю, если в точке ∞ L–резольвента $(\mu L - A)^{-1}$ матрицы A имеет устранимую особую точку; и равное порядку полюса в точке ∞ матриц–функции $(\mu L - A)^{-1}$ в противном случае.

В **п. 1.3** рассматривается задача Шоуолтера–Сидорова для систем леонтьевского типа, определяется вид ее точного и приближенного решения. В **п. 1.4** приводятся постановка задачи и теорема о существовании единственного решения задачи оптимального управления для системы леонтьевского типа, описывается основная идея ее численного решения. В **п. 1.5** представлена математическая модель ИУ, используемая в исследованиях задач ДИ инженерами. В **п. 1.6** кратко представлены результаты численного исследования модели оптимального динамического измерения с учетом только инерционности ИУ. В **п. 1.7** представлена динамическая балансовая модель предприятия, которая является неотъемлемой частью моделирования потребительского потока на основе данных динамики продаж продукции предприятия.

Вторая глава состоит из пяти параграфов и содержит результаты математического моделирования оптимальных динамических измерений. В **п. 2.1** приводится методика построения математической модели измерительной системы, состоящей из нескольких измерительных преобразователей, связанных между собой, показывается, что при моделировании сложных ИУ может быть получена система леонтьевского типа. Приведен пример измерительной системы с итерационным принципом восстановления сигнала (рис. 1).

В **п. 2.2** обсуждается значение множества допустимых измерений для повышения адекватности математической модели оптимальных динамических измерений. В **п. 2.3** представлена математическая модель оптимальных динамических измерений с учетом инерционности ИУ и резонансов на выходе ИУ. При этом рассмотрены два случая: 1) известны частоты и амплитуды резонансных помех; 2) известна «форма сигнала», т.е. известен вид функции, зависящей от времени, описывающей сигнал. Здесь ИУ моделируется системой

$$\begin{cases} L\dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + D\eta \end{cases} \tag{7}$$



$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot z_{M1} \\ \dot z_{M2} \\ \dot u_{M1} \\ \dot u_{M2} \\ \dot y_{M1} \\ \dot y_{M2} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} A_{M1} & 0 & B_{M1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{M2} & 0 & B_{M2} & 0 & 0 \\ C_{M1} & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & C_{M2} & 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & -I & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_{M1} \\ z_{M2} \\ u_{M1} \\ u_{M2} \\ y_{M1} \\ y_{M2} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \\ I \end{pmatrix} \cdot u_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ D_{M1} & 0 \\ 0 & D_{M2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{M1} \\ \sigma_{M2} \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \cdot I & I & -I & -I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_{M1} \\ z_{M2} \\ u_{M1} \\ u_{M2} \\ y_{M1} \\ y_{M2} \end{pmatrix}$$

Рис. 1: Сложное ИУ как система леонтьевского типа

и начальным условием Шоуолтера–Сидорова (2). Задача оптимальных динамических измерений заключается в нахождении вектор-функции оптимальных динамических измерений $v \in \mathfrak{U}_\partial$ для (5) с начальным условием (2), если выполняется (6), а функционал штрафа задан (3), и справедлива

Теорема 1. Пусть матрица A (L, p)-регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, $\det A \neq 0$. Тогда для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathfrak{Y}$ существует единственное решение $(x(v), v) \in \chi \times \mathfrak{U}_\partial$ для задачи (2),(3),(6),(7), и $v(t)$ – оптимальное динамическое измерение для этой задачи.

При этом приводится вид $x(v)$, являещегося решением задачи (2),(7).

В **п. 2.4** представлена математическая модель ОДИ с учетом инерционности ИУ и наличия резонансных помех и на выходе и в цепях ИУ (1),(2),(4),(6). Справедлива

Теорема 2. Пусть матрица A (L, p)-регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, $\det A \neq 0$. Тогда для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathfrak{Y}$ существует единственное решение $(x(v), v) \in \chi \times \mathfrak{U}_\partial$ для задачи (1),(2),(4),(6), причем $v(t)$ – оптимальное динамическое измерение для этой задачи, а $x(v)$ является решением задачи (1),(2) и имеет вид

$$x(t) = x(v, t) = \lim_{k \to \infty} x_k(v, t) =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \Bigg[-\sum_{q=0}^{p} \left(A^{-1} \left(\mathbb{I} - \left(k L_k^L(A) \right)^{p+1} \right) L \right)^q A^{-1} \left(\mathbb{I} - \left(k L_k^L(A) \right)^{p+1} \right) (Bv + G\varsigma)^{(q)}(t) +$$

$$+\left(\left(L-\frac{t}{k}A\right)^{-1}L\right)^{k}x_0+ \tag{8}$$
$$+\int\limits_0^t\left(\left(L-\frac{t-s}{k}A\right)^{-1}L\right)^{k-1}\left(L-\frac{t-s}{k}A\right)^{-1}\left(kL_k^L(A)\right)^{p+1}(Bv+G\varsigma)(s)ds\Bigg].$$

В **п. 2.5** представлен подход к моделированию потребительского потока на основе балансовой модели предприятия и динамических измерений продаж. Обсуждаются возможности использования модели ОДИ в решении маркетинговых задач предприятия.

Третья глава состоит из пяти параграфов и содержит результаты численного исследования изучаемых математических моделей. В **п. 3.1** описан численный метод решения задачи оптимальных динамических измерений с учетом инерционности ИУ и резонансов, возникающих на выходе ИУ. Численно исследованы математические модели, описанные в п. 2.3. В **п. 3.2** описан численный метод решения задачи оптимальных динамических измерений с учетом инерционности ИУ и резонансов, возникающих как на выходе ИУ, так и в его цепях. Этот метод позволяет численно исследовать математические модели, описанные в пп. 2.4 и 2.5. Измерение будем искать в виде тригонометрических полиномов $u^\ell=col\left(\sum\limits_{j=0}^{\ell}\mathfrak{a}_{1j}\sin\varpi_j t,\sum\limits_{j=0}^{\ell}\mathfrak{a}_{2j}\sin\varpi_j t,\dots\sum\limits_{j=0}^{\ell}\mathfrak{a}_{nj}\sin\varpi_j t\right)$ помехи на выходе ИУ $\eta=col\left(\sum\limits_{j=1}^{M_1}\mathfrak{a}_{\omega_{1j}}\sin\omega_{1j}t,\sum\limits_{j=1}^{M_2}\mathfrak{a}_{\omega_{2j}}\sin\omega_{2j}t,...,\sum\limits_{j=1}^{M_m}\mathfrak{a}_{\omega_{mj}}\sin\omega_{mj}t\right)$ помехи в цепях ИУ $\varsigma=col\left(\sum\limits_{j=1}^{N_1}\mathfrak{a}_{\phi_{1j}}\sin\phi_{1j}t,\sum\limits_{j=1}^{N_2}\mathfrak{a}_{\phi_{2j}}\sin\phi_{2j}t,...,\sum\limits_{j=1}^{N_n}\mathfrak{a}_{\phi_{nj}}\sin\phi_{nj}t\right)$ Используя эти представления и $x_k(u)$ получим

$$J_k(u^\ell)=\beta\sum_{q=0}^{1}\int\limits_0^\tau\left\|S\left(Cx_k^{(q)}(u^\ell,\varsigma,t)\right)-\left(Sy_0^{(q)}(t)-S\overline{y}_0^{(q)}(t)\right)\right\|^2dt+$$
$$+(1-\beta)\sum_{q=0}^{\theta}\int\limits_0^\tau\langle N_q(u^\ell+\varsigma)^{(q)}(t),(u^\ell+\varsigma)^{(q)}(t)\rangle dt. \tag{9}$$

Обозначим приближенное оптимальное динамическое измерение v_k^ℓ, т.е.

$$J(v_k^\ell)=\min_{u^\ell\in\mathfrak{U}_\partial^\ell}J_k(u^\ell).$$

Представим основные шаги алгоритма

Шаг 1. Вводятся начальные данные.

Шаг 2. Проверяется условие $\det A > \varepsilon_1$

Шаг 3. По значениям наблюдений Y_0 и $\overline{Y}_0$ создаются интерполяционные ряды Котельникова на интервале $[0, \tau]$

Шаг 4. Рассчет значений весов и узлов квадратурной формулы Гаусса

Шаг 5. По функциям $y_0(t)$ и $\overline{y}_0(t)$ рассчитываются массивы значений наблюдений и скорости их изменения в узлах квадратурной формулы Гаусса

Шаг 6. Определяется значение p и значение K, начиная с которого находится численное решение задачи.

Шаг 7. Взяв в качестве начального значения $u_0^\ell = col(0, \ldots, 0)$, находится по элементно значения вектор-функции состояний ИУ, а затем вычисляется соответствующее ей значение функционала $J_k(u_0^\ell)$.

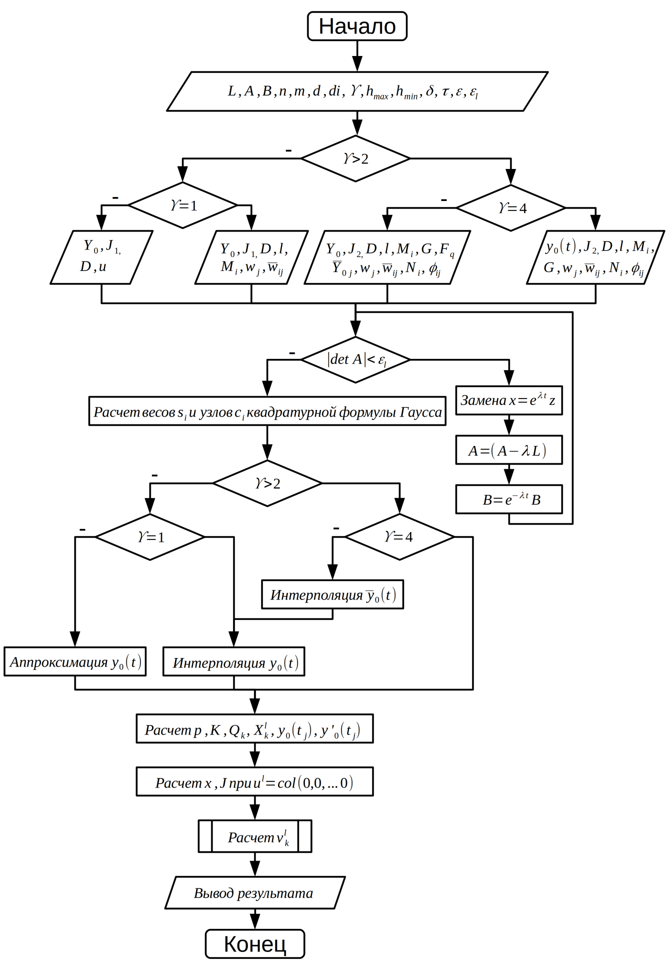


Рис. 2: Блок-схема программного комплекса с основными процедурами алгоритма

Шаг 8. Реализуется процедура оптимизации на основе идеи метода покоординатного спуска с памятью.

В **п. 3.3** доказаны свойства функционала качества и теорема о сходимости приближенных решений, получаемых на основе разработанного численного метода, к точному. Показана сильная выпуклость функционала качества на множестве допустимых измерений. Доказана

Теорема 3. Пусть матрица A (L, p)-регулярна, $p \in \{0\} \bigcup \mathbb{N}$, $\det A \neq 0$, $\mathfrak{U}_\partial \subset \mathfrak{U}$ – компактном и выпуклом множестве. Тогда

$$\lim_{l \to +\infty} \lim_{k \to +\infty} J_k\left(v_k^\ell\right) = J(v),$$

$$\lim_{l \to +\infty} \lim_{k \to +\infty} v_k^\ell = v.$$

В **п. 3.4** приведено описание программного коплекса, реализующего алгоритм численного решения задачи ОДИ с учетом резонансов, приведены и описаны блок-схемы програмного комплекса (рис.2) и основных алгоритмов. Предложена процедура распараллеливания этапа поиска ОДИ. Результатам вычислительных экспериментов посвящен **п. 3.5**. Приведем один из них. По передаточной функции ИУ

$$W_g(p) = \frac{1}{(T_1^2p^2 + 2\xi_1 T_1 p + 1)(T_2^2p^2 + 2\xi_2 T_2 p + 1)(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}$$

$T_1 = 0,01c, \xi_1 = 0,6, T_2 = 0,002c, \xi_2 = 0,2, T_3 = 0,0005c, T_4 = 0,0001c$ построим систему леонтьевского типа

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 0,9881x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = 10000x_1 - 119x_2, \\ \dot{x}_3 = x_2 - x_3 - 0,999204x_4, \\ \dot{x}_4 = 250000x_3 - 119x_4, \\ \dot{x}_5 = 2000x_4 - 2000x_5, \\ \dot{x}_6 = 10000x_5 - 10000x_6, \\ \ y = x_6, \end{cases}$$

Известны частоты помех на выходе и входе $\omega = 5000$ и $\phi = 500$ соответственно, таким образом, $\eta = a_\omega \sin 5000t$ и $\varsigma = a_\phi \sin 500t$.

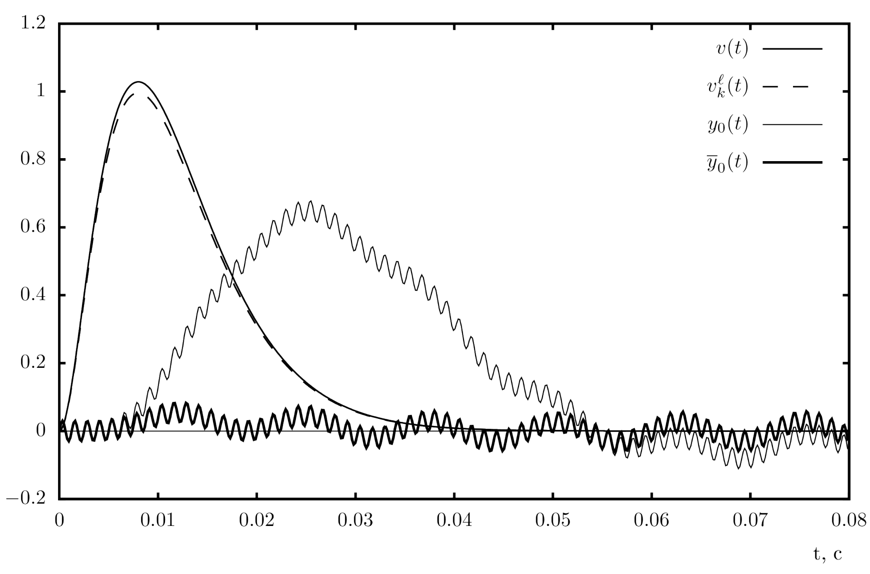


Рис. 3: Пример результатов вычислительного эксперимента

На рис. 3 показаны: точное ОДИ $v(t)$ (является модельным для проверки эффективности численного метода) и приближенное ОДИ $v_k^\ell(t)$. Функции наблюдения $\overline{y}_0(t)$ при нулевых значениях измеряемого сигнала, а $y_0(t)$ – при ненулевых значениях измеряемого сигнала, построенные по результатам натурного эксперимента.

В **Заключении** представлены итоги выполненного исследования, рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы.

Положения, выносимые на защиту:

– в рамках *развития качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей* качественно исследован класс математических моделей оптимального динамического измерения, позволяющий рассмотреть различные случаи детерминированных помех в технических и экономических задачах динамических измерений; показана справедливость теорем о существовании единственного решения задач оптимального динамического измерения; разработан метод математического моделирования сложных измерительных систем с приведением примера такого устройства, реализующего итерационный принцип в динамических измерениях; проведено исследование значимости множества допустимых измерений в процессе решения задач оптимальных динамических измерений;

– в рамках *разработки, обоснования и тестирования эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий* разработан численный метод решения задач оптимального измерения с учетом инерционности измерительного устройства и помех различной природы, показана сходимость получаемых приближенных решений к точному; предложена схема распараллеливания основной вычислительной процедуры;

– в рамках *реализации эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента* разработан программный комплекс, написанный на языке программирования C++; проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие эффективность предложенных алгоритмов и адекватность проведенного моделирования.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Худяков, Ю.В.* Алгоритм численного исследования модели Шестакова - Свиридюка измерительного устройства с инерционностью и резонансами / Ю.В. Худяков // Математические заметки СВФУ. – 2013. –Т. 20, № 2. – С. 211 – 221. (ВАК)
2. *Худяков, Ю.В.* Распараллеливание алгоритма решения задачи оптимального измерения с учетом резонансов / Ю.В. Худяков // Вестник ЮУрГУ. Серия: математическое моделирование и программирование. – 2013. –Т. 6, № 4. – С. 122 – 127 (ВАК, Zbl)
3. *Khudyakov Yu.V.* On adequacy of the mathematical model of the optimal dynamic measurement / Khudyakov Yu.V. // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2017. – T. 4, № 2. – С. 14-25. (ВАК, Zbl, MatSciNet)
4. *Шестаков, А.Л.* Динамические измерения в пространствах «шумов» / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк, Ю.В. Худяков // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии,

управление, радиоэлектроника». – 2013. – Т. 13, № 2. – С. 4–11. (ВАК)
5. *Shestakov A.L.* The Numerical Algorithms for the Measurement of the Deterministic and Stochastic Signals / A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk, A.V. Keller, Y.V.Khudyakov // Book series: Springer Proceedings in Mathematics conference: Semigroups of Operators: Theory and Applications. 2015. – P. 183 - 195 (Scopus, WoS)
6. *Shestakov A.L.* Dynamic Measurements in the View of the Group Operators Theory / A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk, Y.V.Khudyakov // Book series: Springer Proceedings in Mathematics conference: Semigroups of Operators: Theory and Applications. 2015. – P. 273 - 286 (Scopus, WoS)
7. *Худяков, Ю.В.* Программа вычисления решения задачи оптимального измерения с резонансами (OptMsrR Programm): свидетельство 2013619053 / Келлер А.В., Худяков Ю.В. (RU); правообладатель ГОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет». – 2013618862; заявл. 31.07.2013; зарегистр. 24.09.2013, Реестр программ для ЭВМ.
8. *Худяков, Ю.В.* Об измерении белого шума в модели Шестакова-Свиридюка / Ю.В. Худяков // Измерения: состояние, перспективы развития: тез.докл. междунар. науч.-практ. конф., г. Челябинск, 25-27.09.2012. – Челябинск, 2012. – Т. 1. – С. 240–241.
9. *Худяков, Ю.В.* Об общем подходе к оптимальному измерению в технических и экономических приложениях / Ю.В. Худяков // Междунар. летняя математическая школа памяти В.А. Плотникова.: тез.докл., г. Одесса, 15-22.06.2013. – Одесса, 2013,– С. 97.
10. *Худяков, Ю.В.* Модели Шестакова—Свиридюка с резонансом / Ю.В. Худяков // Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений: Тез.докл. г Новосибирск, 18-24.08.2013. – Новосибирск, 2013. – С. 285.
11. *Сагадеева, М.А.* Об оптимальном измерении для модели измерительного устройства с учетом детерминированного мультипликативного воздействия / М.А. Сагадеева, Ю.В. Худяков // Труды XII всероссийского совещания по проблемам управления, Москва, ИПУ РАН, 16-19.06.2014, – Москва, 2014. – С. 2240–2245.
12. *Худяков, Ю.В.* Оптимальные измерения детерминированных и стохастических сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк, Ю.В. Худяков // Труды XII всероссийского совещания по проблемам управления, Москва, ИПУ РАН, 16-19.06.2014 – Москва, 2014. – С. 1231–1242
13. *Худяков, Ю.В.* Численный анализ математической модели Шестакова-Свиридюка с инерционностью и резонансами / Ю.В. Худяков // Метрология и метрологическое обеспечение: Сборник докладов 23-Национального научного симпозиума с международным участием, Созополь, Болгария, 9-13.09.2014. – София, 2014. – С. 107–110.
14. *Khudyakov, Y.V.* On Mathematical modeling of the Measurement Trandusers / Y.V. Khudyakov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2016. –Vol. 3, № 3. – P. 68–73.

Типография «Два комсомольца»

Подписано в печать 17.04.2018. Формат 60 × 84 1/16.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 0,98. Уч.-изд. л. 1,0.
Тираж 125 экз. Заказ 142/456

Отпечатано в типографии «Два комсомольца».
454008, г. Челябинск, Комсомольский пр., 2