На правах рукописи

БОКОВ Александр Викторович

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ГЕОФИЗИКИ И ТЕПЛОВОЙ ДИАГНОСТИКИ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

ЧЕЛЯБИНСК — 2014

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (НИУ) на кафедре вычислительной математики.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор ТАНАНА Виталий Павлович
Официальные оппоненты:	Акимова Елена Николаевна, доктор физико-математических наук, доцент, ФГБУН Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН), ведущий научный сотрудник;
	Кипнис Михаил Мордкович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «Челябинский государственный педагогический университет», кафедра математики и методики обучения математике, профессор.
Ведущая организация:	ФГАОУ ВПО «Волгоградский государственный университет»

Защита состоится 30 сентября 2014 г. в 15^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 212.298.14 при ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (НИУ), расположенном по адресу: г. Челябинск, проспект Ленина, 76, ауд. 1001.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета.

Автореферат разослан «___» августа 2014 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук,
доцент А.В. Келлер

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Математические модели многих физических и технологических процессов, представляющих интерес в инженерной практике, строятся на основе решений обратных задач математической физики. Часто они являются некорректно поставленными. Решение обратных задач в большинстве случаев проводится в рамках некоторой математической модели исследуемого объекта и состоит, как правило, в определении либо коэффициентов дифференциальных уравнений, либо области, в которой действует оператор, либо начальных условий, либо сочетания перечисленных выше факторов. В подавляющем большинстве случаев обратные задачи для уравнений математической физики не удаётся решить аналитически, что делает актуальным разработку численных методов их решения.

Некоторые задачи математической физики, такие, например, как ретроспективные задачи теплопроводности и диффузии, задачи томографии, изначально формулируются как обратные. Тогда использование прямых методов недопустимо, поскольку приводит к большим ошибкам в решении, причём оценка уровня ошибки бывает несостоятельной. Кроме того, методы теории некорректно поставленных задач имеют преимущества перед другими в том случае, когда исходные данные заданы с погрешностью, как это бывает в физическом эксперименте.

Большой вклад в развитие данной теории внесли академики А. Н. Тихонов и М. М. Лаврентьев, член–корр. РАН В. К. Иванов, математики А. Л. Агеев, В. Я. Арсенин, А. Б. Бакушинский, Г. М. Вайникко, В. В. Васин, А. В. Гончарский, А. М. Денисов, С. И. Кабанихин, А. С. Леонов, В. А. Морозов, Л. Д. Менихес, В. Г. Романов, В. П. Танана, А. Г. Ягола, Р. Латтес, Ж.-Л. Лионс, R. Acar, J. N. Franklin, C. W. Groetsch и другие.

В данной диссертационной работе для решения обратных задач применяются методы, основанные на методе регуляризации А. Н. Тихонова. В обратной задаче гравиметрии применён новый подход, заключающийся в использовании обобщённого метода L-регуляризации при более общих условиях на решение, чем это было ранее у других авторов (например, в работах В. Б. Гласко, А. В. Цирульского, П. С. Мартышко). Для функции, описывающей границу области залегания пород, требование $z \in W_2^1$ заменено более слабым $z \in L_2$, что позволило искать решения в широком классе функций. Для оценки параметров нефтяного пласта по данным гидродинамических исследований использован новый численный метод применительно к задаче в осесимметричной постановке, что позволило разработать эффективный численный алгоритм регуляризации.

Цель и задачи исследования. Целью данной работы является исследование математических моделей тепловой диагностики технических объектов, процесса регистрации аномалий гравитационного поля, гидродинамического исследования нефтяных пластов с последующей разработкой и обоснованием эффективных численных методов решения соответствующих обратных задач математической физики. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. В рамках рассматриваемых математических моделей осуществить переход от прямых задач к обратным, состоящим в определении либо неизвестного коэффициента гидропроводности (обратная задача фильтрации), либо неизвестной функции теплового потока (обратная граничная задача теплопроводности), либо формы границы раздела сред (обратная задача гравиметрии).

2. Разработать новые математические методы моделирования в задачах геофизики и тепловой диагностики. Исследовать адекватность математических моделей характеру изучаемых физических процессов.

3. Разработать эффективные численные методы и алгоритмы поиска приближённых решений с помощью методов теории некорректно поставленных задач, получить соответствующие оценки погрешности решений, которые позволили бы судить о степени надёжности полученных результатов.

4. Реализовать в виде комплекса программ для решения задач на компьютере разработанные численные методы и алгоритмы, провести вычислительные эксперименты на модельных примерах и проанализировать полученные результаты.

Методы исследования. В работе использовались методы вычислительной математики, математического моделирования, математической физики, функционального анализа, дифференциальных уравнений, теории обратных и некорректно поставленных задач, вариационного исчисления, теории оптимизации.

Научная новизна работы состоит в новом подходе к разработке качественных методов исследования математических моделей и вычислительных методов для решения ряда обратных задач математической физики:

1. Исследованы математические модели тепловой диагностики технических объектов, процесса регистрации аномалий гравитационного поля,

гидродинамического исследования нефтяных пластов. Получены условия выполнения теоремы единственности решения соответствующей обратной коэффициентной задачи фильтрации и оценки точности приближённого решения обратной задачи тепловой диагностики восстановления потока на границе.

2. Приведено теоретическое обоснование применимости метода обобщённой L-регуляризации для нахождения приближённого решения в обратной задаче гравиметрии и в обратных коэффициентных задачах теплопроводности и фильтрации в пространстве L_2. Доказана применимость метода конечномерной аппроксимации для нахождения регуляризованных решений применительно к решению обратных задач для уравнений фильтрации и теплопроводности.

3. На основе численных методов разработан и реализован на ЭВМ комплекс программ для проведения вычислительных экспериментов.

Теоретическая значимость. Предложен обобщённый метод L-регуляризации и конечномерной аппроксимации для решения нелинейных операторных уравнений. Получены оценки точности приближённого решения в обратной задаче тепловой диагностики. Исследован вопрос единственности решения обратной задачи нестационарной фильтрации. Разработаны и обоснованы новые численные методы решения обратной задачи гравиметрии.

Практическая значимость работы состоит в возможности применения разработанных математических моделей и созданного комплекса программ для решения задач исследования нефтяных пластов, тепловой диагностики технических объектов и изучения аномалий гравитационного поля. Работа выполнялась при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант р_урал_а № 10-01-96000).

Положения, выносимые на защиту.

1. Математическая модель определения коэффициента гидропроводности в задаче исследования нефтяных пластов. Теорема единственности решения обратной коэффициентной задачи фильтрации.

2. Оценка точности приближённого решения обратной граничной задачи тепловой диагностики. Аналитическое представление приближённых решений и оценка их погрешности.

3. Математическая модель определения запасов полезных ископаемых в геологоразведке по регистрируемой аномалии гравитационного поля, вызванной неоднородностью горных пород. Описание строения оператора, порождённого соответствующей обратной задачей гравиметрии.

4. Численные методы и алгоритмы решения указанных задач, в основе которых лежат методы L-регуляризации приближённых решений и конечномерной аппроксимации регуляризованных решений.

5. Комплекс программ, реализующих предложенные алгоритмы решения нелинейных обратных задач для проведения вычислительных экспериментов.

Степень достоверности и апробация результатов. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором лично. Достоверность изложенных в работе результатов обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в диссертации, подтверждается согласием между теоретическими положениями и результатами вычислительных экспериментов, проведённых в данной работе и исследованиях других авторов.

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на Международной Школе-конференции «Обратные задачи: теория и приложения» (г. Ханты-Мансийск, 11–19 августа 2002 года), на Международной конференции «Алгоритмический анализ неустойчивых задач» (ААНЗ-2011), посвящённой памяти В. К. Иванова (г. Екатеринбург, 31 октября – 5 ноября 2011 года), на Международной конференции «Обратные и некорректные задачи математической физики», посвящённой 80-летию со дня рождения академика М. М. Лаврентьева (г. Новосибирск, 5–12 августа 2012 года), а также на научных семинарах ЮУрГУ и ЧелГУ.

Структура и объём диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы и приложения. Полный объём работы составляет 172 страницы. Список литературы содержит 143 наименования.

Основное содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, делается краткий обзор результатов, полученных другими авторами в области некорректно поставленных задач, формулируется цель, ставятся задачи, определяется научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена исследованию математических моделей технологических процессов и физических явлений, сводящихся к нелинейным обратным задачам.

В первом параграфе рассматривается задача математического моделирования процесса гидродинамического исследования нефтяных пластов. Процесс нестационарной фильтрации жидкости к одиночной скважине в осесимметричном случае описывается уравнением

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho\,\sigma(\rho)\,\frac{\partial p}{\partial \rho}\right], \tag{1}$$

где $p = p(\rho, t)$ — давление в пласте, $\sigma = \sigma(\rho)$ — коэффициент гидропроводности, t — время, ρ – полярный радиус, $t \geq 0$, $0 < r_0 \leq \rho \leq \bar{r}$. Сделаем следующие естественные предположения:

$$p(\rho, 0) = p_0; \qquad \frac{\partial p(\bar{r}, t)}{\partial \rho} = 0, \quad t \geq 0; \tag{2}$$

$$p(r_0, t) = f_1(t), \quad t \geq 0. \tag{3}$$

$$\sigma(\rho) \geq d > 0 \text{ при } \rho \in [r_0, \bar{r}]. \tag{4}$$

Задачу (1) – (3) называют прямой задачей фильтрации. Обратная задача заключается в определении неизвестного коэффициента $\sigma(\rho)$ по дополнительной информации о решении задачи (1) – (3). Предположим, что задан дебит скважины

$$\frac{\partial p(r_0, t)}{\partial \rho} = g(t), \tag{5}$$

где $g(t)$ — ограниченная и непрерывная функция, $t \geq 0$.

Так как при неизвестной функции $\sigma(\rho)$ решение $p(\rho, t)$ также неизвестно, то обратную задачу сформулируем как задачу определения двух функций $\sigma(\rho)$ и $p(\rho, t)$, удовлетворяющих условиям (1) – (5).

Сделав в уравнениях (1) – (3), (5) замену переменной $u(\rho, t) = p(\rho, t) - p_0$, перейдем к новой задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho\,\sigma(\rho)\,\frac{\partial u}{\partial \rho}\right], \tag{6}$$

$$u(\rho, 0) = 0, \qquad \frac{\partial u(\bar{r}, t)}{\partial \rho} = 0, \tag{7}$$

$$u(r_0, t) = f(t), \qquad \frac{\partial u(r_0, t)}{\partial \rho} = g(t), \tag{8}$$

где $0 < r_0 \leq \rho \leq \bar{r}$, $t \geq 0$, $f(t) = f_1(t) - p_0$. Будем предполагать, что функция $f(t) \in C^2[0, \infty)$ удовлетворяет условиям

$$f(0) = f'(0) = 0, \; f(t) = 0 \text{ при } t \geq t_0, \; f(t) \not\equiv 0 \text{ при } t \geq 0, \tag{9}$$

а функция $\sigma(\rho) \in C^2[r_0, \bar{r}]$ и удовлетворяет условию (4).

Будем говорить, что пара функций $\{\sigma(\rho), u(\rho, t)\}$ принадлежит классу K_1, если выполнены следующие условия:

1. $\sigma(\rho) \in C^2[r_0, \bar{r}],\ \ \sigma(\rho) \geq d > 0$ при $\rho \in [r_0, \bar{r}]$;
2. $u(\rho, t), u'_\rho(\rho, t) \in C([r_0, \bar{r}] \times [0, \infty)),\ \ u''_{\rho\rho}(\rho, t), u'_t(\rho, t) \in C((r_0, \bar{r}) \times (0, \infty))$;
3. $u(\rho, 0) = 0,\ \ u_\rho(\bar{r}, t) = 0,\ \ u(r_0, t) = f(t),\ \ u_\rho(r_0, t) = g(t)$.

Решением обратной задачи (6) – (8) назовём пару функций $\sigma(\rho)$ и $u(\rho, t)$, удовлетворяющих уравнению (6) в классе K_1.

Теорема 1. *Предположим, что функция* $f(t)$ *удовлетворяет условиям* (9). *Тогда, если* $\sigma_i(\rho)$ *и* $u_i(\rho, t)$, $i = 1, 2$ — *решения обратной задачи* (6) – (8) *такие, что* $\sigma_1'(\bar{r}) = \sigma_2'(\bar{r}) = \sigma_1'(r_0) = \sigma_2'(r_0) = 0$ *и* $\sigma_1(r_0) = \sigma_2(r_0) = \sigma_1(\bar{r}) = \sigma_2(\bar{r})$, *а также*

$$\int_{r_0}^{\bar{r}} \frac{d\xi}{\sqrt{\sigma_1(\xi)}} = \int_{r_0}^{\bar{r}} \frac{d\xi}{\sqrt{\sigma_2(\xi)}},$$

то $\sigma_1(\rho) = \sigma_2(\rho)$ *и* $u_1(\rho, t) = u_2(\rho, t)$ *для всех* $\rho \in [r_0, \bar{r}]$ *и* $t \geq 0$.

Во втором параграфе рассматривается задача математического моделирования процесса тепловой диагностики технического объекта. Рассмотрим дифференциальное уравнение, описывающее процесс теплопроводности,

$$\frac{\partial T(y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(y, t)}{\partial y^2}, \tag{10}$$

где $t \geq 0,\ \ y \in \big[0, h(t)\big],\ \ h(0) = y_0,\ \ h(t) = y_1$ при $t \geq t_0 > 0,\ \ y_1 \leq y_0$, и функция $h(t)$ непрерывная и строго убывающая на отрезке $\big[0, t_0\big]$. Пусть начальные и граничные условия имеют вид:

$$T(y, 0) = 0,\ y \in \big[0, y_0\big], \qquad T(0, t) + k_0 T_y'(0, t) = 0,\ t \geq 0, \tag{11}$$

где k_0 — заданное отрицательное число,

$$T(y_2, t) = g(t), \quad y_2 \in \big(0, y_1\big), \quad t \geq 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial T(h(t), t)}{\partial y} = z(t), \quad t \geq 0, \tag{13}$$

где $z(t) \in C^2[0, \infty]$ и $z(t) = 0$ при $t \geq t_0$.

В данном диссертационном исследовании функция $g(t)$ считается известной, а функцию $z(t)$ требуется определить. Обратная задача (10) – (13) является некорректно поставленной задачей определения теплового потока на подвижной границе.

Считаем, что при точном значении $g_0(t) \in L_2[0,\infty)$ существует решение $T_0(y,t)$ задачи (10) – (11), (13) такое, что $T_0(h(t),t) = g_0(t)$, $t \geq 0$, а функция $z_0(t) = \dfrac{\partial T_0(h(t),t)}{\partial y}$ принадлежит классу корректности M_r, где

$$M_r = \left\{ z_0 : \|z_0\|^2_{L_2} + \|z_0'\|^2_{L_2} \leq r^2, \left\|T_0(h(t),t)\right\|^2_{L_2} + \left\|\frac{\partial T_0(h(t),t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2} \leq r^2 \right\}.$$

Далее в работе полагаем, что функция $g_0(t)$ нам неизвестна, а вместо неё даны некоторое приближение $g_\delta(t)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\|g_0 - g_\delta\|_{L_2} \leq \delta$. Полученная в работе оценка точности по порядку приближённого решения $z_\delta(t)$ имеет вид:

$$\|z_\delta(t) - z_0(t)\|_{L_2} \leq C_7 \ln^{-2}\delta,$$

где $\delta \in (0, \delta_0]$, а $C_7 > 0$ – некоторое число, не зависящее от δ.

В третьем параграфе рассматривается задача математического моделирования процесса регистрации аномалии гравитационного поля, вызванной неоднородностью горных пород.

В двумерном случае обратная задача гравиметрии сводится к решению нелинейного интегрального уравнения

$$K(z(x)) \equiv \frac{\Delta\rho}{4\pi} \int_{-l}^{l} \ln \frac{(x-\xi)^2 + H^2}{(x-\xi)^2 + (H - z(\xi))^2}\, d\xi = \Delta g(x), \tag{14}$$

где $T = \{-l \leq \xi \leq l,\ -H \leq z \leq -H + z(\xi)\}$ — область распределения источников гравитационного поля, $z(\xi) \in L_2[-l,l]$ — верхняя граница области T, $\Delta g(x) \in L_2(-\infty,+\infty)$ — измеряемая аномалия силы тяжести на поверхности $z = 0$. Преобразуем уравнение (14) к виду

$$Az = f(x), \tag{15}$$

где

$$\begin{gathered} Az = \int_{-l}^{l} \ln\left((x-\xi)^2 + (H - z(\xi))^2\right) d\xi, \\ f(x) = -\tfrac{4\pi}{\Delta\rho}\Delta g(x) + \int_{-l}^{l} \ln\left(H^2 + (x-\xi)^2\right) d\xi. \end{gathered} \tag{16}$$

Оператор A действует из пространства $L_2[-l,l]$ в $L_2(-\infty,+\infty)$. При этом считаем, что функция $f(x)$ нам известна, а $z(\xi)$ требуется найти.

Предположим, что при $f(x) = f_0(x)$ уравнение (15) разрешимо, но точное значение $f_0(x)$ нам неизвестно. Вместо него даны δ-приближение $f_\delta(x)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\|f_\delta - f_0\| \leq \delta$. Требуется по исходной информации (f_δ, δ) определить множество приближённых решений M_δ такое, что

$$M_\delta \xrightarrow{\beta} M_0 \text{ при } \delta \to 0,$$

где M_0 — множество точных решений z_0 уравнения (15) при правой части $f(x) = f_0(x)$ (определение β-сходимости будет дано ниже). Представим оператор A в виде суперпозиции двух операторов $A = B \circ L$, где B действует из $L_2\big([-l, l] \times (-\infty, +\infty)\big)$ в $L_2(-\infty, +\infty)$ и определяется формулой

$$Bv = \int\limits_{-l}^{l} v(\xi, x)\, d\xi, \tag{17}$$

а оператор L действует из $L_2[-l, l]$ в $L_2\big([-l, l] \times (-\infty, +\infty)\big)$, имеет область определения $D(L) = \{z : z \in L_2[-l, l],\ 0 \le z(\xi) < H\}$ и определяется формулой

$$Lz = v(\xi, x) = \ln\left((x - \xi)^2 + (H - z(\xi))^2\right). \tag{18}$$

Таким образом, оператор A в уравнении (15) может быть представлен суперпозицией двух операторов, один из которых, определяемый формулой (17), линеен и ограничен, а второй, определяемый формулой (18), слабо-сильно замкнут и имеет непрерывный обратный.

Во **второй главе** обосновываются численные методы решения обратных задач, рассмотренных в первой главе. Для каждой задачи разрабатывается алгоритм решения на основе конечномерных аппроксимаций регуляризованных решений. Для нелинейной обратной задачи даётся общая постановка метода регуляризации её решения. Рассматривается обобщённый метод L-регуляризации применительно к обратной задаче гидродинамики.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — оператор с областью определения $D(A) \subset H$ и множеством значений $R(A) \subset H$.

Будем говорить, что последовательность множеств $\{M_n\}$ из метрического пространства X β-сходится к множеству $M_0 \subset X$, и обозначать $M_n \xrightarrow{\beta} M_0$, если $\beta(M_n, M_0) \to 0$ при $n \to \infty$, где $\beta(M_n, M_0) = \sup\Big\{\rho(x, M_0) : x \in M_n\Big\}$.

Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f, \tag{19}$$

где $u \in D(A)$, $f \in H$. Предположим, что при $f = f_0$ оно разрешимо, но точное значение правой части f_0 уравнения (19) нам неизвестно. Вместо f_0 даны приближённое значение f_δ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что

$\|f_\delta - f_0\| \le \delta$. Требуется по исходным данным $\{f_\delta, \delta\}$ построить приближённое решение u_δ, близкое к точному решению $M_0 = \{\bar{u}_0 : A\bar{u}_0 = f_0\}$ уравнения (19) при $f = f_0$. Метод регуляризации заключается в сведении поставленной задачи к вариационной:

$$\inf\Big\{\|Au - f_\delta\|^2 + \alpha\|u\|^2 : u \in D(A)\Big\}, \tag{20}$$

где $\alpha > 0$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Если оператор A слабо полузамкнут, то вариационная задача* (20) *разрешима.*

В случае произвольного оператора A вариационная задача (20) может не иметь решений. Тогда метод регуляризации к решению операторного уравнения (19) неприменим. Обобщение метода регуляризации заключается в том, что вместо элементов, минимизирующих функционал задачи (20), в качестве приближённых решений уравнения (19) берутся элементы, на которых значение этого функционала близко к нижней грани (20). В дальнейшем приближённым решением уравнения (19), полученным методом обобщённой регуляризации, будем называть множество $M^\alpha_{\delta,\varepsilon}$, на котором выполняется условие

$$M^\alpha_{\delta,\varepsilon} = \left\{\bar{u} : \bar{u} \in D(A),\ \|A\bar{u} - f_\delta\|^2 + \alpha\|\bar{u}\|^2 \leqslant r^\alpha_\delta + \varepsilon\right\},$$

где $r^\alpha_\delta = \inf\left\{\|Au - f_\delta\|^2 + \alpha\|u\|^2 : u \in D(A)\right\}$, а $\varepsilon > 0$.

Пусть U, F и G — сепарабельные гильбертовы пространства, а A и L — слабо замкнутые операторы с областями определения $D(A), D(L) \subset U$ и множествами значений $R(A) \subset F$, $R(L) \subset G$. При этом будем предполагать, что $D(A) \bigcap D(L) \neq \varnothing$. Метод L-регуляризации заключается в сведении задачи (19) к вариационной:

$$\inf\left\{\|Au - f_\delta\|^2 + \alpha\|Lu\|^2 : u \in D(A) \bigcap D(L), \alpha > 0\right\}, \tag{21}$$

Множество решений вариационной задачи (21) обозначим через $M^\alpha_L(\delta)$ и будем называть приближённым решением уравнения (19), полученным методом L-регуляризации. Так как вариационная задача (21) при общих предположениях об операторах A и L может не иметь решения, множество приближённых решений $M^{\alpha,\varepsilon}_\delta$ уравнения (19) определим формулой

$$M^{\alpha,\varepsilon}_\delta = \Big\{\bar{u} : \bar{u} \in D,\ \|A\bar{u} - f_\delta\|^2 + \alpha\|L\bar{u}\|^2 \le \\ \le \inf\big[\|Au - f_\delta\|^2 + \alpha\|Lu\|^2 : u \in D\big] + \varepsilon\Big\}, \quad \varepsilon > 0.$$

В работе обобщённый метод L-регуляризации был применён к решению обратной задачи гравиметрии и к решению обратной задачи (6) – (8). В частности, была доказана сходимость метода регуляризации в задаче определения коэффициента гидропроводности пласта при условии $\sigma(\rho) \in L_2[r_0, \bar{r}]$. Изучались вопросы конечномерной аппроксимации регуляризованных решений при численной реализации обратных задач.

Последовательность операторов $\{A_n\}$ будем называть A-полной, если для любого элемента $u \in D(A)$ найдётся последовательность $\{u_n\}$ такая, что при всяком значении n $u_n \in D(A)$, $u_n \to u$, а $A_n u_n \to Au$ при $n \to \infty$.

Пару A, $\{A_n\}$ будем называть слабо полузамкнутой, если из того, что последовательность $\{u_n\}$ ограничена, а $A_n u_n \xrightarrow{\text{сл}} \bar{f}$ следует, что существует элемент $\bar{u} \in D(A)$ такой, что $A\bar{u} = \bar{f}$ и $\|\bar{u}\| \le \varliminf\limits_{n\to\infty} \|u_n\|$.

Пару A, $\{A_n\}$ будем называть слабо-сильно замкнутой, если из того, что $u_n \xrightarrow{\text{сл}} \hat{u}$, а $A_n u_n \to \bar{f}$ следует, что $\hat{u} \in D(A)$ и $A\hat{u} = \bar{f}$.

Наряду с вариационной задачей для операторного уравнения (19) рассмотрим также вариационную задачу

$$\inf\left\{\left\|A_n u - f_\delta^{(n)}\right\|^2 + \alpha\|u\|^2 : u \in D(A_n)\right\}, \tag{22}$$

где $\alpha > 0$. Если предположить слабую полузамкнутость операторов A и A_n, то вариационные задачи (20) и (22) будут разрешимы. Обозначим решение задачи (22) через $M_\delta^{\alpha,n}$.

Теорема 3. *Пусть* $f_\delta^{(n)} \to f_\delta$, *последовательность операторов* $\{A_n\}$ *является* A*-полной, а для любой подпоследовательности* $\{A_{n_k}\}$ *пара* A, $\{A_{n_k}\}$ *слабо полузамкнута и слабо-сильно замкнута. Тогда имеет место* β*-сходимость аппроксимаций* $M_\delta^{\alpha,n}$ *к регуляризованному решению* M_δ^α.

В случае применения обобщённого метода L-регуляризации при определённых условиях также имеет место сходимость аппроксимированных решений к регуляризованному. В работе[1] приведены условия, при выполнении которых будет иметь место β-сходимость приближённых решений $M_\delta^{\alpha(\delta),\varepsilon(\delta)}$ к множеству точных решений M_0 уравнения (19), отвечающих значению правой части $f(t) = f_0(t)$: $M_\delta^{\alpha(\delta),\varepsilon(\delta)} \xrightarrow{\beta} M_0$.

Воспользуемся конечномерными аппроксимациями регуляризованных решений в задачах регистрации аномалии гравитационного поля и гидродинамического исследования пластов. Так, для решения задачи (15) – (16) сначала разобьём отрезок $[-l, l]$ на n равных частей $-l = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n = l$ с

[1] **Танана, В. П.** Методы решения нелинейных некорректно поставленных задач / В. П. Танана, А. В. Танана. — Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2006. — 102 с.

шагом $\Delta\xi$. Обозначим отрезок разбиения $\Delta_i = [\xi_i, \xi_{i+1}]$. В качестве конечномерного подпространства U_n рассмотрим пространство кусочно-постоянных на $[-l, l]$ функций $z \in U_n \Leftrightarrow z(\xi) = \{z_i$ при $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}],\ i = 0, 1, \ldots n-1\}$. Бесконечный интервал $-\infty < x < +\infty$ заменим конечным отрезком $[-s, s]$ и разобьем его на m равных частей $(m \geq n)$ с шагом Δx, подобрав число s так, чтобы $\Delta x = \Delta\xi$, и чтобы точки разбиения отрезка $[-s, s]$ совпадали с точками разбиения отрезка $[-l, l]$.

Таким образом, вариационная задача (21) сводится к конечномерной:

$$\inf \left\{ \int\limits_{-s}^{s} \left[\frac{2l}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln\left((x-\xi_i)^2 + (H-z_i)^2\right) - f_\delta^n(x) \right]^2 dx + \right.$$
$$\left. + \alpha \int\limits_{-s}^{s} \frac{2l}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln^2\left((x-\xi_i)^2 + (H-z_i)^2\right) dx \right\}, \quad (23)$$

где $f_\delta^n(x) \to f_\delta(x)$ при $n \to \infty$.

Обозначим множество решений задачи (23) через $M_{\delta,n}^\alpha$. Тогда, как следует из теоремы 3, для любого $\varepsilon > 0$ имеет место β-сходимость аппроксимаций $M_{\delta,n}^\alpha$ к регуляризованному решению $M_\delta^{\alpha,\varepsilon}$: $M_{\delta,n}^\alpha \to M_\delta^{\alpha,\varepsilon}$ при $n \to \infty$.

Третья глава посвящена разработке комплекса программ численного решения описанного класса обратных задач математической физики. Обсуждаются вопросы построения дискретных аналогов дифференциальных уравнений, необходимых для реализации алгоритмов решения обратных задач. Приводится структура программного комплекса и результаты проведённых численных экспериментов. Производится их сравнение с результатами других авторов.

В качестве основного метода для нахождения минимума функционала $F(z) = \|Az - f_\delta\|^2 + \alpha\|Lz\|^2$ в обратной задаче потенциала был применён градиентный метод. Использовалась итерационная схема:

$$z^{k+1} = z^k - \beta_k \cdot S(z^k),$$

где

$$S(z^k) = \frac{1}{2}F'(z^k) = \big(A'(z^k)\big)^*\big(A(z^k) - f_\delta\big) + \alpha\big(L'(z^k)\big)^* L(z^k).$$

Условием останова итераций являлось выполнение для заданного уровня погрешности ε неравенства

$$\Delta^k = \frac{\|A(z^k) - f_\delta\|^2_{L_2[-l,l]}}{\|f_\delta\|^2_{L_2[-l,l]}} < \varepsilon.$$

Следующая часть главы посвящена разработке комплекса программ решения задач исследования нефтяных пластов, регистрации аномалии гравитационного поля, тепловой диагностики технических объектов, а также обсуждению численных экспериментов.

В **заключении** приводятся основные выводы по теме диссертации, обсуждаются перспективы применения полученных результатов. В приложении приводятся результаты численных экспериментов. Приведем для иллюстрации один пример.

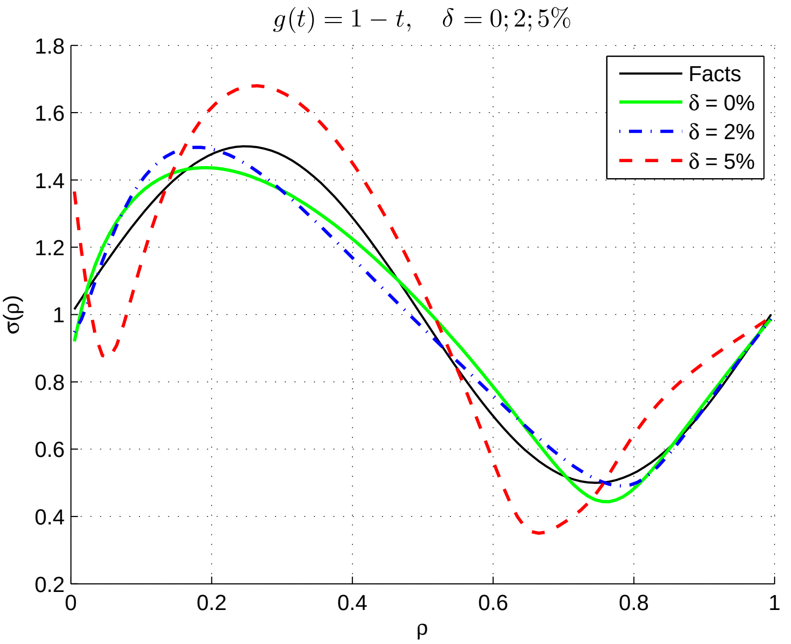

Рис. 1: Восстановление функции $\sigma(\rho)$ (пример 1)

Пример 1. Коэффициент гидропроводности и поток на границе заданы функциями $\sigma(\rho) = 1 + 0,5\sin(2\pi\rho)$ и $g(t) = 1 - t$.

Сначала в прямой задаче по $\sigma(\rho)$ и $g(t)$ вычислялся след решения на границу области $\rho = r_0$. Полученная функция $f(t) = u(r_0, t)$ использовалась в алгоритме решения обратной задачи в качестве дополнительной информации о забойном давлении в скважине. Расчёты проведены на сетке $n_t \times n_\rho = 100 \times 100$ (n_t — число шагов по времени, n_ρ — число шагов по координате ρ).

На рис. 1 приведены результаты восстановления $\sigma(\rho)$ по данным примера 1. Точному решению (заданной функции) соответствует кривая «Facts». Остальные кривые представляют приближённые решения, построенные на основании данных о граничном условии с погрешностями $\delta = 0\%$, $\delta = 2\%$ и $\delta = 5\%$ соответственно.

Список работ автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в рецензируемых изданиях и журналах, рекомендуемых ВАК

1. Боков, А. В. Об оценке точности приближённого решения одной обратной задачи тепловой диагностики с подвижной границей / А. В. Боков, В. П. Танана // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2010. — Т. 13, № 1 (41). — С. 133–139.

2. Боков, А. В. Особенности математического моделирования процесса гидродинамического исследования нефтяных пластов / А. В. Боков, В. П. Танана // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». — 2013. — Т. 6, № 3. — С. 95–103.

3. Bokov, A. V. On Estimating the Precision of Approximate Solutions to an Inverse Problem of Thermal Diagnostics with Moving Boundary / A. V. Bokov, V. P. Tanana // Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2011. — Vol. 5, № 1. — P. 104–109.

Свидетельства о регистрации программ

4. Боков, А. В. Свидетельство Роспатента о государственной регистрации программы для ЭВМ «Численное решение обратной задачи гравиметрии на основе метода регуляризации А. Н. Тихонова» № 2013661344 от 05.12.2013 г.

5. Боков, А. В. Свидетельство Роспатента о государственной регистрации программы для ЭВМ «Численное исследование фильтрационной модели нефтяного пласта для определения коэффициента гидропроводности» № 2014610695 от 16.01.2014 г.

Другие публикации

6. Боков, А. В. Регуляризация нелинейных операторных уравнений / А. В. Боков, В. П. Танана // Известия Челябинского научного центра УрО РАН. — 2003. — № 1. — С. 5–7.

7. Боков, А. В. О регуляризации нелинейных операторных уравнений / А. В. Боков, В. П. Танана // Вестник Челябинского государственного университета. — 2003. — № 1 (7). — С. 5–21.

8. Боков, А. В. О приближённом решении обратной задачи фильтрации / А. В. Боков, А. В. Танана // Известия Челябинского научного центра УрО РАН. — 2007. — № 2. — С. 10–15.

9. Боков, А. В. О единственности решения обратной задачи нестационарной фильтрации / А. В. Боков // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Вычислительная математика и информатика». — 2012. — № 47 (306), вып. 2. — С. 12–21.

10. Боков, А. В. Об единственности решения обратной задачи нестационарной фильтрации / А. В. Боков, В. П. Танана; Челябинский государственный университет. — Челябинск, 1996. — 6 с. — Библ.: 2 назв. — Деп. в ВИНИТИ РАН 19.04.1996, № 1290–В1996.

11. Боков, А. В. Регуляризация нелинейных операторных уравнений / А. В. Боков, В. П. Танана // Обратные задачи: теория и приложения: тез. докл. Международ. школы-конф., Ханты-Мансийск, 2002. — С. 102.

12. Боков, А. В. О единственности решения обратной задачи нестационарной фильтрации / А. В.Боков // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: тез. докл. Международ. конф., посвящён. памяти В. К. Иванова, Екатеринбург, 31 октября – 5 ноября 2011 года. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011. — С. 122.

13. Боков, А. В. Метод конечномерных аппроксимаций в решении обратной задачи потенциала / А. В. Боков // Обратные и некорректные задачи математической физики: тез. докл. Международ. конф., посвящён. 80-летию со дня рождения М. М. Лаврентьева, Новосибирск, 5 – 12 августа 2012 года. — Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2012. — С. 176.