

На правах рукописи



Сафонов Егор Иванович

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ
МОДЕЛЕЙ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

ЧЕЛЯБИНСК — 2015

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Югорский Государственный Университет»

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор
Пятков Сергей Григорьевич

Официальные оппоненты:

Кризский Владимир Николаевич,
доктор физико-математических наук,
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
профессор кафедры «Математическое моделирование»;

Какушкин Сергей Николаевич,
кандидат физико-математических наук,
Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова,
ст. пр. кафедры «Прикладная математика и информатика».

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Воронежский государственный университет».

Защита состоится 01 июля 2015 г. в 11:30 часов на заседании диссертационного совета Д 212.298.14 при Южно-Уральском государственном университете, по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, ауд. 1001.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета, а так же на сайте <http://www.susu.ac.ru/ru/dissertation/d-21229814/safonov-egor-ivanovich>.

Автореферат разослан апреля 2015 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук, доцент



А.В. Келлер

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Модели конвекции-диффузии (тепломассопереноса) возникают в самых различных областях математической физики, в частности, в теории фильтрации, в динамике популяций, при описании процессов фазовых переходов, механической дисперсии и молекулярной диффузии, а также диффузии и вязко-упругой релаксации в полимерах.

Обратные задачи для таких систем сравнительно новая область исследования. Они возникают в геофизике, сейсмике, экологии, и многих других областях. Основные классы исследуемых обратных задач отличаются по виду условий переопределения: интегральные условия с данными зависящими от времени и (или) пространственных переменных, условие финального переопределения (в этом случае в финальный момент времени задано решение), оператор Дирихле-Неймана или Неймана-Дирихле, эволюционные данные переопределения (в этом случае данные зависят от времени, как правило решение или его производные задаются на некоторых пространственных многообразиях или в отдельных точках). Среди работ, посвящённых обратным задачам для параболических уравнений и систем выделим работы: А.И. Прилепко, Д.Г. Орловский, А.М. Денисов, В.Л. Камынин, В. Исаков, М. Ямамото, А.И. Кожанов, А. Лоренци, Ю.Я. Белов и многие другие. Стоит отметить большое количество работ Новосибирской школы по обратным задачам (это в основном работы, посвящённые гиперболическим уравнениям и системам): М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, В. Яхно, Ю.Е. Аниконов, А.Л. Бухгейм, С.И. Кабанихин, а также работы М.И. Белишева, М. Клибанова, Г. Ульмана.

Самая распространённая модель описывающая процессы тепломассопереноса – система уравнений Навье-Стокса, дополненная уравнениями для температуры и концентраций переносимых веществ. Простейшая модель такого вида – модель Обербека–Буссинеска, в которой уравнение для концентрации u переносимого вещества имеет вид

$$u_t - \operatorname{div}(c(x, t)\nabla u) + b(x, t)\nabla u + a(x, t)u = f,$$

где b – вектор скорости течения, a – коэффициент определяющий скорость осаждения в результате химических реакций, c – коэффициент диффузии и правая часть f – плотность функции источников. Опишем некоторые другие модели. Модель планового фильтрационного потока имеет вид

$$\frac{\partial(\theta H c)}{\partial t} - \operatorname{div}(\varepsilon H U c) + \gamma c = \operatorname{div}(\varepsilon H D \nabla c) + f(t, M),$$

где t – время, M – точка пространства, c – концентрация загрязнения, θ – объёмная пористость грунта, ε – кинематическая пористость, H – уровень грунтовых

вод, U – скорость фильтрационного потока, D – коэффициент дисперсии, γ – постоянная распада загрязняющего мигранта, f – функция источника загрязнения. Модели динамики популяции записывается в виде

$$\begin{aligned}\partial_t u_r + \operatorname{div} \vec{j}_r(u) &= u_r g_r(u) \text{ в } \Omega, \\ (\vec{j}_r(u)|\vec{\nu}) &= 0 \text{ на } \partial\Omega,\end{aligned}$$

где $r = 1, 2$, где $u = (u_1, u_2)$ вектор плотности населения, $\vec{j}$ – вектор потока, записываемый в виде $\vec{j}_r(u) = -\nabla[(\alpha_r + \beta_{r1}u_1 + \beta_{r2}u_2)u_r] - \gamma_r u_r \nabla\varphi$, где $\alpha_r > 0$, $\beta_{rs} \geq 0$, $\gamma \geq 0$ – константы, а φ известный внешний потенциал. Модель фазового поля для изучения фазовых переходов представима как

$$\begin{aligned}\partial_t \varphi &= \nabla(k(T)\nabla\varphi) + f_1(\varphi, T) \\ \mu(\varphi)\partial_t T - \lambda(\varphi, T)\partial_t \varphi &= -\nabla(M(\varphi, T)\nabla(1/T)) \text{ в } \Omega.\end{aligned}$$

Здесь k , λ , μ , M и f_1 некоторые известные гладкие функции такие, что k , μ и M положительны. Модель смешивания пресной и морской грунтовых вод имеет вид

$$\partial_t u + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \text{ в } \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

где $\vec{j} = -M(\vec{q})\nabla u + \vec{q}u$ и $M(\vec{q})$ – гидродинамическая дисперсионная матрица. Модель диффузии и вязко-упругой релаксации в полимерах:

$$\begin{aligned}u_t + j_x &= 0 \\ \sigma_t - \varphi(u)u_t &= \rho(u)u - \beta(u)\sigma \text{ в } \Omega,\end{aligned}$$

u функция плотности жидкости, σ – напряжение показывающее проникновение молекул, φ , ρ и β неотрицательны а вектор потока задаётся в виде $j = -D(u)u_x - H(u)\sigma_x - M(u, \sigma)u$, где $D > 0$ и H , φ , ρ и β неотрицательны, а M и ψ некоторые гладкие функции.

Целью данной работы является исследование обратных задач с интегральными условиями переопределения для математических моделей тепломассопереноса и их обобщений, с последующими разработкой, обоснованием и программной реализацией эффективных численных методов решения.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**:

1. Исследовать вопросы корректности постановок обратных задач с интегральными условиями переопределения для математических моделей тепломассопереноса и получить оценки устойчивости.
2. Показать, что при подходящем выборе весовых функций зависящих от параметра в интегральных операторах, решения задач с точечными условиями переопределения можно приблизить решениями задач с интегральными условиями переопределения и установить порядок сходимости по параметру.

3. Разработать эффективные численные методы и алгоритмы поиска приближённых решений с помощью методов конечных элементов и конечных разностей, получить соответствующие оценки погрешности решений, которые позволили бы судить о степени надёжности полученных результатов.
4. Реализовать в виде комплекса программ для решения задач на компьютере разработанные численные методы и алгоритмы, провести вычислительные эксперименты на модельных примерах и проанализировать полученные результаты.

Научная новизна. Впервые исследованы вопросы корректности для многомерных достаточно общих классов обратных задач для математических моделей тепломассопереноса и более общих моделей с интегральными условиями переопределения. В отличие от предыдущих работ в диссертации рассмотрены вопросы о построении неизвестных функций, входящих в уравнение, в виде конечных отрезков ряда по известному базису. Впервые, рассмотрен вопрос о возможности приближения решений задач с точечными условиями переопределения решениями задач с интегральными условиями переопределения. Теоретические результаты работы позволяют строить большое количество новых методов, основанных на методе конечных разностей, методе конечных элементов и других классических методах численного решения задач математической физики. Построен и реализован новый прямой итерационный численный метод для нахождения плотности функции источника или коэффициентов уравнения характеризующих параметров среды. Создан новый комплекс программ для решения ряда модельных обратных задач тепломассопереноса.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретические результаты работы развивают теорию обратных задач для дифференциальных уравнений математической физики и теорию дифференциальных уравнений в целом. Новые методы и подходы к решению обратных задач, описанные в работе, могут быть использованы в дальнейшем при изучении самых разных задач экологии, теории фильтрации, динамики популяций, теории диффузии и в многих других областях. Предлагаемый численный алгоритм позволяет разрабатывать новые программы и информационно-моделирующие комплексы, а также системы поддержки принятия решений в задачах рационального природопользования и предупреждения чрезвычайных ситуаций. Разработанный программный комплекс позволяет проводить вычислительные эксперименты и может быть использован в практических задачах построения и определения функции источника загрязнения по данным замера.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в диссертации, подтверждается согласием между теоретическими положениями и результатами вы-

числительных экспериментов, проведённых в данной работе и исследованиями других авторов. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором лично.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на научных семинарах ЮГУ, а также на 5-и научных и научно-практических конференциях: LII Международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск 2014); III Молодежная научно-практическая конференция «Информационные технологии Югры» (Ханты-Мансийск 2014); VII Международная конференция по математическому моделированию (Якутск 2014); Международная научная конференция «Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций» (Казань 2014); Международная конференция «Алгоритмический анализ неустойчивых задач» (Челябинск 2014).

Публикации. Результаты диссертационной работы опубликованы в 11 научных работах, в их числе 4 статьи в ведущих российских рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ, 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ и 1 свидетельство о государственной регистрации базы данных. Список работ приводится в конце автореферата. В совместных с научным руководителем работах С.Г. Пяткову принадлежит постановка задачи, в диссертацию вошли только результаты, полученные её автором.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и двух приложений. Объём диссертации составляет 126 страниц. Список литературы содержит 97 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Все приведённые выше модели тепломассопереноса являются частными случаями систем уравнений

$$Lu = u_t + A(t, x, D)u = f_c, \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (1)$$

где G – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\Gamma \in C^{2m}$. Матричный эллиптический оператор A порядка $2m$ имеет вид $A = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x, t) D^\alpha$, где $a_\alpha(x, t)$ матрицы-функции размерности $h \times h$, в обратных задачах об определении правой

части и

$$A = \sum_{i=r_0+1}^r q_i A_i(x, t) + A_{r+1}(x, t), \quad A_i u = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_{\alpha}^i D^{\alpha} u \quad (2)$$

в коэффициентных обратных задачах (здесь функции $q_i(t)$ подлежат определению). Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad B_j u|_S = \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_{j\alpha}(x, t) D^{\alpha} u|_S = g_j(t, x), \quad S = \Gamma \times (0, T). \quad (3)$$

Правая часть в (1) имеет вид:

$$f_c = \sum_{i=1}^{r_0} b_i(t, x) q_i(t) + f. \quad (4)$$

Неизвестными в (1), (2) являются решение u и функции $q_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, r$), входящие в правую часть (1) и оператор A (в случае коэффициентных обратных задач). В работе рассматриваются 2 вида условий переопределения. В первом случае условия переопределения имеют вид

$$\int_{G_i} u \varphi_i(x) dx = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (5)$$

где $\varphi_i(x), \psi_i(t)$ - известные функции и $G_i \subset G$ некоторые области. Во втором случае рассматриваем условия вида

$$u(x_i, t) = \psi_i(t), \quad x_i \in G, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (6)$$

Параметры s, r связаны равенством $r = sh$ (или $r_0 = sh$ для линейных обратных задач, в этом случае полагаем $r = r_0$).

В первой главе приводится ряд вспомогательных утверждений, используемых в доказательствах основных результатов диссертации.

Во второй главе рассматривается обратная задача (1), (3), (4), с интегральным условием переопределения вида (5) и предполагаем, что неизвестные функции $q_i(t)$ входят только, в правую часть уравнения (1). Обратная задача в таком случае является линейной. Приведем используемые ниже условия на данные задачи. Считаем, что параметр p удовлетворяет условию $p > n + 2m$.

$$\psi_i(t) \in W_p^1([0, T]), \quad \psi_i(0) = \int_{G_i} u_0(x) \varphi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (7)$$

Так же считаем, что граница областей $\{G_j\}$ ($j = 1, 2, \dots, s$) из условия (5) принадлежит классу C^1 . Условия на весовые функции $\{\varphi_j(x)\}$, записывается в виде:

$$\text{supp } \varphi_j \subset \overline{G_j}, \quad \varphi_j \in W_q^1(G_j) \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \right), \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (8)$$

Определим матрицу $B(t)$ размера $r_0 \times r_0$, строки которой с номерами $(k-1)h+1, kh, (k=1, 2, \dots, s)$ занимают матрицы размера $h \times r$ со столбцами $\int_G b_1 \varphi_k dx, \dots, \int_G b_{r_0} \varphi_k dx$ и потребуем, чтобы существовала постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$|\det B(t)| \geq \delta_0, \text{ для п.в. } t \in [0, T]. \quad (9)$$

Мы требуем, чтобы были выполнены условия

$$f \in L_p(Q), \quad u_0(x) \in W_p^{2m-2m/p}(G), \quad g_j(x, t) \in W_p^{k_j, 2mk_j}(S), \quad (10)$$

где $j = 1, 2, \dots, m$ и $k_j = 1 - \frac{m_j}{2m} - \frac{1}{2pm}$ и

$$g_j(x, 0) = B_j(x, 0)u_0(x)|_{\partial G}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (11)$$

Мы считаем, что

$$\begin{aligned} a_\alpha(t, x) &\in L_\infty(Q) \quad (|\alpha| < 2m), \quad a_\alpha \in C(\overline{Q}) \quad (|\alpha| = 2m), \\ b_{j\beta} &\in C^{2m-m_j}(\overline{S}) \quad (j = 1, \dots, m, |\beta| \leq m_j). \end{aligned} \quad (12)$$

Говорим, что оператор $\partial_t + A$, ($A = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x, t) D^\alpha$) параболичен, если найдется постоянная $\delta_1 > 0$ такая, что любой корень p многочлена

$$\det(A_0(t, x, i\xi) + pE) = 0, \quad (A_0 = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha u)$$

(E – единичная матрица) удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{Re} p \leq -\delta_1 |\xi|^{2m}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall (x, t) \in Q, \quad (13)$$

и выполнено условие Лопатинского, т.е. для любой точки $(t_0, x_0) \in S$ система

$$(\lambda E + A_0(i\xi', \partial_{y_n}))v(z) = 0, \quad B_{j0}(i\xi', \partial_{y_n})v(0) = h_j, \quad (14)$$

($\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, $y_n \in \mathbb{R}^+$, $j = 1, 2, \dots, m$) имеет единственное решение из $C(\overline{\mathbb{R}^+})$ убывающее на бесконечности для всех $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|\arg \lambda| \leq \pi/2$ и $h_j \in E$ таких что $|\xi'| + |\lambda| \neq 0$.

Кроме введённых ранее условий также нужны условия вида

$$b_j \in L_\infty(0, T, L_p(G)), \quad j = 1, 2, \dots, r_0, \quad a_\alpha(x, t) \in L_\infty(0, T; W_\infty^1(G_0)), \quad (15)$$

$$a_\alpha(x, t) \in L_\infty(0, T; W_\infty^1(G_0)), \quad |\alpha| = 2m. \quad (16)$$

В разделе 2.1 доказывается следующая теорема существования и единственности для задачи с интегральным условием переопределения.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (7)-(16). Тогда существует единственное решение $(u, q_1, \dots, q_{r_0})$ задачи (1), (3), (4), (5) такое, что

$$u \in W_p^{1,2m}(Q), \quad q_i(t) \in L_p(0, T), \quad i = 1, 2, \dots, r_0.$$

Решение удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{W_p^{1,2m}(Q)} + \sum_{i=1}^{r_0} \|q_i(t)\|_{L_p(0,T)} \leq c(\|f\|_{L_p(Q)} + \sum_{j=1}^m \|g_j\|_{W_p^{k_j, 2mk_j}(S)} + \|u_0\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \sum_{j=1}^s \|\psi_j\|_{W_p^1(0,T)}).$$

В разделе 2.2 записываются следствия из предыдущего раздела для моделей тепломассопереноса ($m = 1$). В разделе 2.3 рассматривается случай, когда условия на весовые функции в интегральных условиях переопределения сводятся к минимальным

$$\text{supp } \varphi_j \subset \overline{G_j}, \quad \varphi_j \in L_1(G_j), \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (17)$$

Пусть $G_0 = \bigcup_{i=1}^s G_i$, $Q_0 = G_0 \times (0, T)$, $Q_0^\gamma = G_0 \times (0, \gamma)$, $G_{\delta,i} = \{x \in G_i : \rho(x, \partial G_i) > \delta\}$, $Q_{\delta,i}^\gamma = G_{\delta,i} \times (0, \gamma)$, $G_\delta = \bigcup_{i=1}^s G_{\delta,i}$ и $Q_\delta = G_\delta \times (0, T)$, $Q_\delta^\gamma = G_\delta \times (0, \gamma)$ ($\delta \geq 0$), $Q^\gamma = G \times (0, \gamma)$. Нам потребуются дополнительные условия вида:

$$\nabla f \in L_p(Q_0), \quad \nabla b_j \in L_\infty(0, T, L_p(G_0)), \quad (18)$$

$$\nabla u_0 \in W_p^{2m-\frac{2m}{p}}(G_0), \quad \nabla a_\alpha(x, t) \in L_\infty(Q_0), \quad (|\alpha| \leq 2m). \quad (19)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия (7), (9)-(15), (17)-(19). Тогда существует единственное решение $(u, q_1, \dots, q_{r_0})$ задачи (1), (3), (4), (5) такое, что

$$u \in W_p^{1,2m}(Q), \quad q_i(t) \in L_p(0, T), \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad \nabla_x u \in W_p^{1,2m}(Q_\delta),$$

для всех $\delta > 0$. При фиксированном $\delta > 0$ решение удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{W_p^{1,2m}(Q)} + \|\nabla_x u\|_{W_p^{1,2m}(Q_\delta)} + \sum_{i=1}^{r_0} \|q_i(t)\|_{L_p(0,T)} \leq c(\|f\|_{L_p(Q)} + \|\nabla_x f\|_{L_p(Q_0)} + \sum_{j=1}^m \|g_j\|_{W_p^{k_j, 2mk_j}(S)} + \|u_0\|_{W_p^{2m-\frac{2m}{p}}(G)} + \|\nabla_x u_0\|_{W_p^{2m-\frac{2m}{p}}(G_0)} + \sum_{j=1}^s \|\psi_j\|_{W_p^1(0,T)}).$$

В разделе 2.4 приводятся следствия полученных результатов для моделей тепломассопереноса. В разделе 2.5 рассматривается вопрос о приближении решений обратных задач с точечными условиями переопределения решениями задач с интегральными условиями переопределения. В точечных задачах вместо интегрального условия (5) рассматриваются условия вида $u(x_j, t) = \psi_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, s$). Обозначим решение обратной задачи с этими условиями через

и. Рассмотрим функцию $\varphi(x) \in C_0^\infty(B_1)$, $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ такую, что $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$ и $\varphi(x) \geq 0$ для всех x . Определим $\varphi_{j\varepsilon}(x) = \varphi(\frac{x-x_j}{\varepsilon}) \frac{1}{\varepsilon^n}$. Мы заменяем точечные условия интегральными условиями вида (5) где в качестве плотностей берем функции $\varphi_{i\varepsilon}$. Основным результатом этого раздела оценка для нормы $\|u_\varepsilon - u\|_{W_p^{1,2m}(Q)}$, которая показывает её стремление к нулю. Здесь u_ε – решение задачи (1)-(4),(5) с функциями $\varphi_{j\varepsilon}$ вместо функций φ_j .

Третья глава посвящена рассмотрению коэффициентных обратных задач в самом общем виде, где неизвестные функции входят как в правую часть уравнения, так и в оператор A как коэффициенты и таким образом оператор A представим в виде (2). Определим матрицу B размера $r \times r$, строки которой с номерами $(k-1)h+1, kh, (k=1, 2, \dots, s)$ занимают матрицы размера $h \times r$ со столбцами:

$$\begin{aligned} & \int_G b_1(x, 0) \varphi_k dx, \dots, \int_G b_{r_0}(x, 0) \varphi_k dx, \\ & \int_G -A_{r_0+1}(x, 0) u_0 \varphi_k dx, \dots, \int_G -A_r(x, 0) u_0 \varphi_k dx. \end{aligned}$$

Мы требуем, чтобы

$$\det B \neq 0. \quad (20)$$

Определим постоянные q_i^0 ($i = 1, 2, \dots, r$) исходя из решений системы

$$\begin{aligned} & \psi_{jt}(0) + \sum_{i=r_0+1}^r q_i^0 \int_G A_i u_0 \varphi_j dx + \int_G A_{r+1} u_0 \varphi_j dx = \\ & \sum_{i=1}^{r_0} q_i^0 \int_G b_i(x, 0) \varphi_j dx + \int_G f \varphi_j dx, \quad j = 1, 2, \dots, s. \end{aligned}$$

В разделе 3.1 рассматривается случай, когда у нас выполнено условие (8). Мы требуем, чтобы:

$$b_j, f \in C([0, T]; L_p(G_0)) \cap L_p(Q) \quad (j = 1, 2, \dots, r_0), \quad (21)$$

$$a_\alpha^i \in C([0, T]; W_p^1(G_0)) \text{ при } |\alpha| = 2m, \quad (22)$$

$$a_\alpha^i \in C([0, T]; L_p(G_0)) \quad (i = r_0 + 1, r_0 + 2, \dots, r + 1) \text{ при } |\alpha| \leq 2m - 1, \quad (23)$$

$$\psi_i(t) \in C^1([0, T]), \quad \psi_i(0) = \int_{G_i} u_0(x) \varphi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & a_\alpha^i(t, x) \in L_\infty(Q) \quad (|\alpha| < 2m), \\ & a_\alpha^i \in C(\overline{Q}) \quad (|\alpha| = 2m, \quad i = r_0 + 1, r_0 + 2, \dots, r + 1) \\ & b_{j\beta} \in C^{2m-m_j}(\overline{S}) \quad (j = 1, \dots, m, \quad |\beta| \leq m_j). \end{aligned} \quad (25)$$

Так же считаем, что выполнены условия (13), (14) для вспомогательного оператора

$$A^0 = \sum_{i=r_0+1}^r q_i^0 A_i + A_{r+1} \text{ или, что}$$

$$\text{оператор } \partial_t + A^0 \text{ параболичен.} \quad (26)$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия (8), (10), (11), (20)-(26). Тогда существует $\gamma_0 > 0$ такое, что на промежутке $t \in [0, \gamma_0]$ существует единственное решение $(u, \vec{q})$ ($\vec{q} = (q_1, \dots, q_r)$) задачи (1)-(5) такое, что

$$u \in W_p^{1,2m}(Q^{\gamma_0}), \quad q_i(t) \in C([0, \gamma_0]), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Решение непрерывно зависит от данных задачи в следующем смысле. Фиксируем $R > 0$ и рассмотрим класс данных задачи S_R , состоящий из наборов $(f, u_0, \{\psi_j\}_{j=1}^s, \{g_j\}_{j=1}^m)$ таких, что выполнены условия (10), (11), (24), $\psi_j \in C^{1+\beta}([0, T])$ для некоторого $\beta \in (0, 1]$ и всех j и

$$\begin{aligned} & \|f\|_{L_p(Q)} + \sum_{j=1}^s \|\psi_j\|_{C^{1+\beta}([0, T])} + \|f\|_{C([0, T]; L_p(G_0))} + \\ & \|u_0\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \sum_{j=1}^m \|g_j\|_{W_p^{k_j, 2mk_j}(S)} \leq R, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Тогда найдется $\gamma_1 > 0$ такое, что для любого набора данных $(f, u_0, \{\psi_j\}_{j=1}^s, \{g_j\}_{j=1}^m) \in S_R$ существует единственное решение $(u, \vec{q})$ ($\vec{q} = (q_1, \dots, q_r)$) задачи (1)-(5) такое, что

$$u \in W_p^{1,2m}(Q^{\gamma_1}), \quad q_i(t) \in C([0, \gamma_1]), \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

и для любых двух решений $(u^i, q_1^i, \dots, q_r^i)$ ($i = 1, 2$) задачи (1)-(5) из класса

$$u^i \in W_p^{1,2m}(Q^{\gamma_1}), \quad q_j^i \in C([0, \gamma_1]), \quad (i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \dots, r),$$

отвечающих двум различным наборам данных $f^i, \psi_j^i, u_0^i, g_\eta^i$ ($j = 1, 2, \dots, s$, $i = 1, 2$, $\eta = 1, 2, \dots, m$) из S_R справедлива оценка устойчивости

$$\begin{aligned} & \|u^1 - u^2\|_{W_p^{1,2m}(Q^{\gamma_1})} + \sum_{j=1}^r \|q_j^1 - q_j^2\|_{C([0, \gamma_1])} \leq \\ & C(\|f^1 - f^2\|_{L_p(Q^{\gamma_1})} + \sum_{j=1}^s \|\psi_j^1 - \psi_j^2\|_{C^1([0, \gamma_1])} + \|f^1 - f^2\|_{C([0, \gamma_1]; L_p(G_0))} + \\ & \|u_0^1 - u_0^2\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \sum_{j=1}^m \|g_j^1 - g_j^2\|_{W_p^{k_j, 2mk_j}(S^{\gamma_1})}), \end{aligned}$$

где постоянная C – зависит от R и $S^{\gamma_1} = \partial G \times (0, \gamma_1)$.

В разделе 3.2 записываются следствия для моделей тепломассопереноса. В разделе 3.3 рассматривается случай, когда условия на весовые функции имеют вид:

$$\text{supp } \varphi_j \subset \overline{G_j}, \quad \varphi_j \in L_1(G_j), \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (27)$$

Также требуем выполнения условий:

$$b_i, f \in L_p(Q), \quad \nabla b_k, \nabla f \in L_p(Q_0) \quad (k = 1, 2, \dots, r_0), \quad (28)$$

$$\nabla u_0 \in W_p^{2m-\frac{2m}{p}}(G_0), \quad \nabla a_\alpha^i(x, t) \in L_\infty(Q_0) \quad (|\alpha| \leq 2m), \quad (29)$$

$$a_\alpha^i \in C([0, T], L_\infty(G_0)) \quad (|\alpha| \leq 2m-1, \quad i = r_0+1, r_0+2, \dots, r+1), \quad (30)$$

$$b_k, f \in C([0, T]; L_\infty(G_0)) \quad (k = 1, 2, \dots, r_0). \quad (31)$$

Матрица B размера $r \times r$ определяется как и в разделе 3.1.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (10), (11), (20), (24)-(31). Тогда существует $\gamma_0 > 0$ такое, что на промежутке $t \in [0, \gamma_0]$ существует единственное решение $(u, \vec{q})$ ($\vec{q} = (q_1, \dots, q_r)$) задачи (1)-(5) такое, что

$$u \in W_p^{1,2m}(Q^{\gamma_0}), \quad \nabla u \in W_p^{1,2m}(Q_\delta^{\gamma_0}), \quad \forall \delta > 0, \quad q_i(t) \in C([0, \gamma_0]), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Решение непрерывно зависит от данных задачи в следующем смысле. Фиксируем $R > 0$ и рассмотрим класс данных задачи S_R , состоящий из наборов $(f, u_0, \{\psi_j\}_{j=1}^s, \{g_j\}_{j=1}^m)$ таких, что выполнены условия (10), (11), (24), (28), (29), (31), $\psi_j \in C^{1+\beta}([0, T])$ для некоторого $\beta \in (0, 1]$ и всех j и

$$\begin{aligned} & \|f^i\|_{L_p(Q)} + \sum_{j=1}^s \|\psi_j\|_{C^{1+\beta}([0, T])} + \|f^i\|_{C([0, T]; L_\infty(G_0))} + \|\nabla f^i\|_{L_p(Q_0)} \\ & \|u_0^i\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \|\nabla u_0^i\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \sum_{j=1}^m \|g_j^i\|_{W_p^{k_j, 2mk_j}(S)} \leq R, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

Тогда найдется $\gamma_1 > 0$ такое, что для любого набора данных $(f, u_0, \{\psi_j\}_{j=1}^s, \{g_j\}_{j=1}^m) \in S_R$ существует единственное решение $(u, \vec{q})$ ($\vec{q} = (q_1, \dots, q_r)$) задачи (1)-(5) такое, что

$$u \in W_p^{1,2m}(Q^{\gamma_1}), \quad \nabla u \in W_p^{1,2m}(Q_\delta^{\gamma_1}) \quad \forall \delta > 0, \quad q_i(t) \in C([0, \gamma_1]), \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

и для любых двух решений $(u^i, q_1^i, \dots, q_r^i)$ ($i = 1, 2$) задачи (1)-(5) из класса

$$u^i \in W_p^{1,2m}(Q^{\gamma_1}), \quad \nabla u \in W_p^{1,2m}(Q_\delta^{\gamma_1}), \quad q_j^i \in C([0, \gamma_1]), \quad (i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, r),$$

отвечающих двум различным наборам данных $f^i, \psi_j^i, u_0^i, g_\eta^i$ ($j = 1, 2, \dots, s, i = 1, 2, \eta = 1, 2, \dots, m$) из S_R и для фиксированного $\delta > 0$ справедлива оценка устойчивости

$$\begin{aligned} & \|u^1 - u^2\|_{W_p^{1,2m}(Q^{\gamma_1})} + \|\nabla(u^1 - u^2)\|_{W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1}^{\gamma_1})} + \sum_{j=1}^r \|q_j^1 - q_j^2\|_{C([0, \gamma_1])} \leq \\ & C(\|f^1 - f^2\|_{L_p(Q^{\gamma_1})} + \sum_{j=1}^s \|\psi_j^1 - \psi_j^2\|_{C^1([0, \gamma_1])} + \|f^1 - f^2\|_{C([0, T]; L_\infty(G_0))} + \\ & \|\nabla(f^1 - f^2)\|_{L_p(Q_0)} + \|u_0^1 - u_0^2\|_{W_p^{2m-2m/p}(G)} + \\ & \|\nabla(u_0^1 - u_0^2)\|_{W_p^{2m-2m/p}(G_0)} + \sum_{j=1}^m \|g_j^1 - g_j^2\|_{W_p^{k_j, 2mk_j}(S^{\gamma_1})}), \end{aligned} \quad (32)$$

где постоянная C – зависит от R и $S^{\gamma_1} = \partial G \times (0, \gamma_1)$.

В разделе 3.4 записываются следствия для моделей тепломассопереноса. В разделе 3.5 рассматриваются вопросы приближения решений обратных задач с точечными условиями переопределения решениями задач с интегральными условиями переопределения. Фиксируем достаточно малый параметр $\delta_1 > 0$ и возьмём в качестве областей G_j δ_1 -окрестности точек x_j из условий (6). Мы потребуем, чтобы:

$$\psi_i(t) \in C^1([0, T]), \quad \psi_i(0) = u_0(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (33)$$

$$b_k, f \in C([0, T]; C^\alpha(\overline{G_0})) \quad (k = 1, 2, \dots, r_0), \quad \alpha = 1 - (n + 2m)/p, \quad (34)$$

$$\nabla f \in L_p(Q_0), \nabla b_j \in L_\infty(0, T; L_p(G_0)), \quad j = 1, \dots, r_0, \quad (35)$$

$$b_k(x_l, t), f(x_l, t), a_\alpha^i(x_l, t) \in C([0, T]), \quad (36)$$

где $k = 1, 2, \dots, r_0$, $i = r_0 + 1, r_0 + 2, \dots, r$, $l = 1, 2, \dots, s$ и $|\alpha| \leq 2m$. Определим матрицу B размера $r \times r$, строки которой с номерами $(k-1)h + 1, kh$, ($k = 1, 2, \dots, s$) занимают матрицы размера $h \times r$ со столбцами: $b_1(x_k, 0), \dots, b_r(x_k, 0), -A_{r_0+1}u_0(x_k), \dots, -A_ru_0(x_k)$. Определим постоянные q_i^0 ($i = 1, 2, \dots, r$) исходя из решений системы

$$\psi_{jt}(0) + \sum_{i=r_0+1}^r q_i^0 A_i u_0(x_j) + A_{r+1}u_0(x_j) = \sum_{i=1}^{r_0} q_i^0 b_i(x_j, 0) + f(x_j, 0),$$

где $j = 1, 2, \dots, s$ и построим оператор $A^0 = \sum_{i=r_0+1}^r q_i^0 A_i + A_{r+1}$.

Теорема 5. Пусть выполнены условия (10), (11), (20), (25)-(26), (29), (30), (33)-(36). Тогда найдется промежуток $[0, \tau_0]$, не зависящий от ε такой, что:

1) на $[0, \tau_0]$ существует единственное решение задачи (1)-(4), (6) такое, что $\vec{q} \in C([0, \tau_0])$, $u \in W_p^{1,2m}(Q^{\tau_0})$, $\nabla u \in W_p^{1,2m}(Q_\delta^{\tau_0})$, $\forall \delta \in (0, \delta_1)$.

2) при всех $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ и некоторого $\varepsilon_0 > 0$ на $[0, \tau_0]$ существует единственное решение $(u_\varepsilon, \vec{q}_\varepsilon)$ задачи (1)-(5), где $\varphi_i = \varphi_{i\varepsilon}$, такое, что $\vec{q}_\varepsilon \in C([0, \tau_0])$, $u_\varepsilon \in W_p^{1,2m}(Q^{\tau_0})$, $\nabla u_\varepsilon \in W_p^{1,2m}(Q_\delta^{\tau_0})$ при всех $\delta \in (0, \delta_1)$.

3) Справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon - u\|_{W_p^{1,2m}(Q^{\tau_0})} + \|\nabla(u_\varepsilon - u)\|_{W_p^{1,2m}(Q_{\delta_1}^{\tau_0})} + \sum_{j=1}^r \|q_j^\varepsilon - q_j\|_{C([0, \tau_0])} \leq c\varepsilon^\alpha.$$

Четвертая глава посвящена построению численного алгоритма решения обратных задач тепломассопереноса об определении функции источника в случае двух пространственных переменных и его программной реализации. Алгоритм является итерационным, основан на методе конечных элементов и методе конечных разностей.

Искомая модель имеет вид

$$u_t - \operatorname{div}(c(x, t) \nabla u) + b(x, t) \nabla u + a(x, t) u = f, \\ f = \sum_{i=1}^{r_0} f_i(t, x) q_i(t) + f_0, \quad b(x, t) = (b_1(x, t), b_2(x, t))^T, \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^T, \quad (37)$$

где неизвестными являются концентрация переносимого вещества u и функции q_i , входящие в функцию источников f .

Условия теоремы 3 в применении к задаче (37) имеют вид:

$$b_j \in L_\infty(0, T, L_p(G)), \quad j = 1, 2, \dots, r_0 = s, \quad (38)$$

$$f_0 \in L_p(Q), \quad u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G), \quad g(x, t) \in W_p^{1-1/2p, 2-1/p}(S), \quad (39)$$

$$g(x, 0) = \frac{\partial u_0}{\partial n} \Big|_{\partial G}, \quad (40)$$

$$b(t, x) \in L_\infty(Q), \quad (|\alpha| < 2m), \quad c \in L_\infty(0, T; W_\infty^1(G)) \cap C(\overline{Q}), \quad (41)$$

$$c(x, t) \geq \delta_0 > 0 \text{ для некоторой постоянной } \delta_0, \quad (42)$$

$$\psi_j \in W_p^1(0, T), \quad \psi_j(0) = u_0(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, s = r_0, \quad (43)$$

$$\nabla f_0 \in L_p(Q_0), \quad \nabla b_j \in L_\infty(0, T, L_p(G_0)), \quad j = 1, 2, \dots, r_0. \quad (44)$$

Определим матрицу $B(t)$ размера $r \times r$, строки, которой занимают вектора $b_1(x_k, t), \dots, b_{r_0}(x_k, t)$. Требуется, чтобы существовала постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$|\det B(t)| \geq \delta_0, \text{ для п.в. } t \in [0, T]. \quad (45)$$

Пятая глава описывает используемые программные решения при реализации алгоритма и программы решения задач. Также в главе обсуждаются результаты вычислительных экспериментов. Реализация алгоритма осуществлялась в среде инженерных и научных расчётов Matlab 2013b, полученные функции Matlab компилировались при помощи Matlab Compiler и Builder NE, в dll-библиотеку, которая используется в .Net веб-приложении. Серверная и клиентская части программы писались на языке C# и Html5 в среде разработки Visual Studio 2012 Express. Для вывода графиков решения, трёхмерный график функции u и графики функций $q(t)$, использовались JavaScript-библиотеки Three.js и flot.js соответственно.

В численных экспериментах в качестве области рассматривается круг единичного радиуса с центром в точке $(0, 0)$. Будем считать, что $f_1 = 1$, $f_2 = x$, $f_3 = y$ и дополнительная информация задаётся в трёх точках наблюдения: $(0.3, -0.3)$; $(0.1, 0)$; $(-0.5, 0.5)$. Задаём две сетки с количеством узлов $N_1 = 263$ и $N_2 = 1015$. Данные для модельной задачи: искомые коэффициенты q_i : $q_1 = t$, $q_2 = 2t^2$, $q_3 = 3t^3$; граничные условия Неймана: $\frac{\partial u}{\partial n} = 2$; коэффициенты уравнения: $d = 1$, $c = \frac{1}{1+t}$, $b_1 = \frac{x}{2(1+t)}$, $b_2 = \frac{y}{2(1+t)}$, $a = \frac{1}{1+t}$; правая

часть: $f = 3 \cdot (x^2 + y^2) - 4 - t - 2x \cdot t^2 - 3y \cdot t^3$. Погрешность между итерациями задаётся пользователем, обозначается через ε . Через τ обозначим время затраченное на вычисление в секундах. На рисунке ниже представлены графики реальных функций q_1 , q_2 , q_3 и результаты работы программы, в случае когда данные возмущены 10-процентным случайным шумом (в его отсутствие графики сливаются).

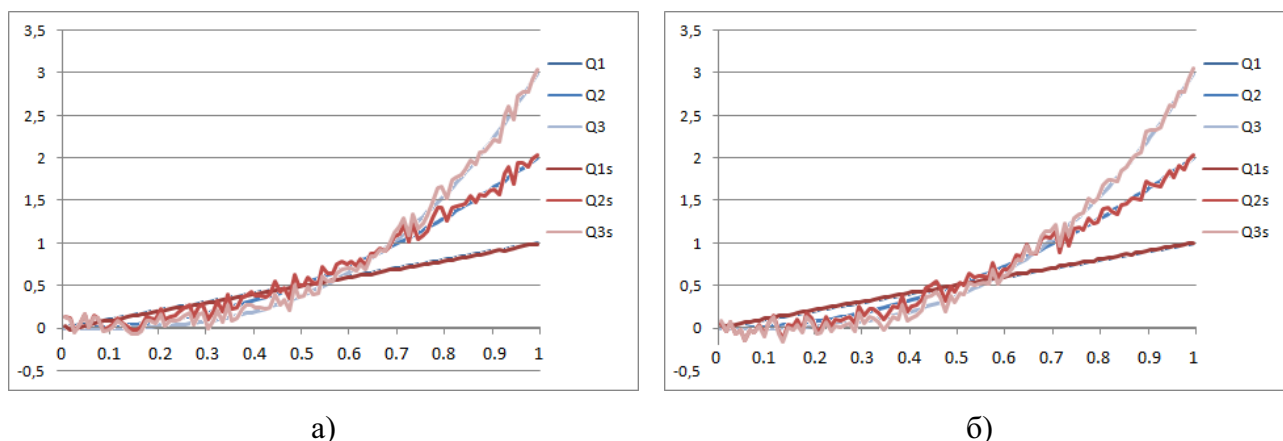


Рисунок 1 — Результаты вычислений.

а) Сетка N_1 , $\varepsilon = 10^{-3}$, $\tau = 12.35$;

б) Сетка N_2 , $\varepsilon = 10^{-3}$, $\tau = 245.66$.

В **заклучении** приведены основные выводы по теме диссертации, обсуждаются перспективы дальнейшего развития программного продукта и оптимизация алгоритма для приложения к практическим задачам.

Публикации автора по теме диссертации

1. Пятков, С.Г. Определение функции источников в математических моделях тепломассопереноса / С.Г. Пятков, Е.И. Сафонов // Междунар. конф. «Студент и научно-технический прогресс»: тез. докл. – Новосибирск, 2014. – С. 97.
2. Пятков, С.Г. Численное моделирование в задачах тепломассопереноса / С.Г. Пятков, Е.И. Сафонов // Междунар. конф. : тез. докл. - Якутск, 2014. - С. 162.
3. Пятков, С.Г. Численный метод определения функции источников в параболических уравнениях и системах / С.Г. Пятков, Е.И. Сафонов // Междунар. науч. конф. «Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций – 2014.»: тез. докл. – Казань, 2014. – Т. 49. – С. 272.
4. Сафонов, Е.И. Определение функции источников в математических моделях тепломассопереноса / Е.И. Сафонов // Всерос. конф. с междунар. участием

- «Алгоритмический анализ неустойчивых задач», посвящённая памяти В.К. Иванова: тез. докл. – Челябинск, 2014. – С. 141.
5. Пятков, С.Г. О некоторых классах линейных обратных задач для параболических систем уравнений / С.Г. Пятков, Е.И. Сафонов // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. – 2014. № 12 (183), вып. 35. – С. 61-75.
 6. Пятков, С.Г. О некоторых классах линейных обратных задач для параболических систем уравнений / С.Г. Пятков, Е.И. Сафонов // Сибирские электронные математические известия. Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление. – 2014. – Т. 11. – С. 777-799.
 7. Пятков, С.Г. Об определении функции источника в математических моделях конвекции–диффузии / С.Г. Пятков, Е.И. Сафонов // Математические заметки СВФУ. – 2014. – Т. 21, № 2 (82). – С. 117-130.
 8. Pyatkov, S.G. Some inverse problems for convection-diffusion equations / S.G. Pyatkov, E.I. Safonov // Bulletin of the south ural state university. Series: «Mathematical modelling, programming & computer software». – 2014. – Т. 7, № 24. – С. 36-50.
 9. Программа численного решения обратных задач для математических моделей тепломассопереноса. (Клиентская часть) № 2014619479 / Пятков С.Г., Сафонов Е.И. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Югорский государственный университет». – 2014619058; заявл. 21.07.2014; зарегистр. 08.09.2014, реестр программ для ЭВМ.
 10. Программа численного решения обратных задач для математических моделей тепломассопереноса. (Серверная часть) № 2014619479 / Пятков С.Г., Сафонов Е.И. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Югорский государственный университет». – 2014619479; заявл. 21.07.2014; зарегистр. 17.09.2014, реестр программ для ЭВМ.
 11. База данных для программы численного решения обратных задач для математических моделей тепломассопереноса № 2015620208 / Пятков С.Г., Сафонов Е. И. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Югорский государственный университет». – 2015620208; заявл. 25.09.2014; зарегистр. 06.02.2015, реестр баз данных.

Подписано в печать 23.04.2015. Усл.печ.л. 1,87
Формат 60 × 84 1/16 Тираж 110 Заказ 326

Отпечатано в типографии "Сити-Принт".
454080, г. Челябинск, ул. Энгельса, 61-а
ИП Мякотин И. В.