

На правах рукописи

Manakoff

Манакова Наталья Александровна

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ПОЛУЛИНЕЙНЫХ
МОДЕЛЯХ ГИДРОДИНАМИКИ И УПРУГОСТИ**

**05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ**

**АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук**

ЧЕЛЯБИНСК – 2015

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет).

Научный консультант:

доктор физико-математических наук, профессор
Свиридов Георгий Анатольевич.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, старший научный
сотрудник Чистяков Виктор Филимонович, ФГБУН «Институт
динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова»
СО РАН, лаборатория системного анализа и вычислительных
методов, главный научный сотрудник;

доктор физико-математических наук, профессор
Кризский Владимир Николаевич,
ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет»,
Стерлитамакский филиал, кафедра математического
моделирования, профессор;

доктор физико-математических наук, профессор
Сукачева Тамара Геннадьевна, ФГБОУ ВПО «Новгородский
государственный университет им. Ярослава Мудрого»,
кафедра алгебры и геометрии, заведующий кафедрой.

Ведущая организация:

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет».

Защита состоится 24 декабря 2015 года в 13:30 часов на заседании диссертационного совета Д 212.298.14 при Южно-Уральском государственном университете, по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, ауд. 1001 (ГУК).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета и на сайте: <http://www.susu.ac.ru/ru/dissertation/d-21229814/manakova-natalya-aleksandrovna/>.

Автореферат разослан 23 сентября 2015 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, доцент



А.В. Келлер

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследования. Диссертационная работа посвящена разработке новых аналитических и численных методов исследования оптимального управления в математических моделях на основе вырожденных полулинейных уравнений математической физики. Актуальность изучения такого рода моделей обусловлена необходимостью решения важных прикладных задач в гидродинамике, электродинамике и теории упругости. Исследование таких математических моделей посвящены работы А.Г. Свешникова, М.О. Корпусова, В.Н. Кризского, Ю.И. Сапронова, А.Д. Баева, В.А. Костина и многих других. Аналитическое и численное исследования вырожденных математических моделей стали возможными благодаря развитию теории уравнений соболевского типа. Изучению вырожденных линейных математических моделей посвящены работы Г.А. Свиридюка, А.В. Келлер, А.А. Замышляевой, С.А. Загребиной, М.В. Фалалеева и многих других. Линейные модели хорошо изучены, но, тем не менее, полулинейные математические модели, хотя и менее исследованы, более адекватно описывают изучаемые процессы. Как правило, процессы, протекающие в механике, технике и производстве, управляемы, поэтому в прикладных задачах часто возникает необходимость в управлении внешним воздействием на изучаемые процессы, позволяющим достигать требуемого результата. Прежде чем исследовать управление в математических моделях, необходимо показать разрешимость начальных задач для них.

Систематическое изучение начально-краевых задач для уравнений, не разрешенных относительно производной по времени, началось в 40-х годах прошлого столетия с работ С.Л. Соболева. Такие уравнения Р.Е. Шоултером было предложено называть уравнениями соболевского типа. В настоящее время они составляют самостоятельную часть теории неклассических уравнений математической физики. Сформировались научные направления и школы по их изучению как в России, так и за рубежом. Данной области исследования посвящены работы Р.Е. Шоултера, А. Фавини, А. Яги, Г.В. Демиденко, С.В. Успенского, Н.В. Сидорова, М.В. Фалалеева, М.О. Корпусова, А.Г. Свешникова, И.В. Мельниковой, С.Г. Пяткова, А.И. Кожанова, Г.А. Свиридюка, Т.Г. Сукачевой, В.Е. Федорова, Ю.Е. Бояринцева, В.Ф. Чистякова, М.В. Булатова и многих других.

В работах Ж.-Л. Лионса, А.Г. Бутковского, А.В. Фурсикова, В.И. Иваненко, Н. Папагеоргиу, Г.О. Фатторини, С.С. Сритхарана, И. Лазиецкой, Р. Триджиани и многих других рассматривались задачи оптимального управ-

ления для уравнений в частных производных. Изучению управляющего воздействия в вырожденных линейных моделях и разработке математических методов посвящены работы Г.А. Свиридюка, А.А. Ефремова, Г.А. Куриной, В.Е. Федорова, М.В. Плехановой, А.В. Келлер, А.А. Замышляевой и других. Несмотря на большой охват исследований задач оптимального управления для распределенных систем, вопросы управления решениями вырожденных нелинейных систем остаются недостаточно изученными. Наиболее сложным из них является построение эффективных численных методов решения задачи оптимального управления. Это прежде всего обусловлено тем, что получение аналитического решения или распространение уже существующих подходов для нахождения численных решений задач оптимального управления для нелинейных вырожденных уравнений математической физики невозможно. Развитие математических методов позволяет обращаться к решению таких задач все чаще. Построению алгоритмов численного решения линейных задач оптимального управления для вырожденных математических моделей посвящены работы В.Ф. Чистякова, С.В. Гайдомак, А.В. Келлер и других.

Актуальность диссертационной работы обусловлена необходимостью создания эффективных аналитических и численных методов исследования оптимального управления в прикладных математических моделях, основанных на полулинейных вырожденных неклассических уравнениях математической физики, востребованных в гидродинамике, геологии при изучении фильтрации жидкости, в нефтедобыче, в теории упругости, электродинамике и других предметных областях. Диссертационная работа примыкает к направлению, созданному и возглавляемому Г.А. Свиридику, основными методами исследования которого являются метод фазового пространства и метод вырожденных (полу)групп операторов. В диссертационной работе исследуется оптимальное управление для математических моделей, которые относятся к классу полулинейных моделей соболевского типа.

Математическая модель Осколкова нелинейной фильтрации. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим условие Дирихле

$$x(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \quad (1)$$

для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации

$$(\lambda - \Delta)x_t - \alpha\Delta x + |x|^{p-2}x = u, \quad p \geq 2. \quad (2)$$

Искомая функция $x = x(s, t)$ соответствует давлению фильтрующейся жидкости; параметры $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+$ характеризуют вязкие и упругие свойства жид-

кости соответственно; свободный член $u = u(s, t)$ отвечает внешнему воздействию. Условие Дирихле (1) и уравнение (2) образуют модель Осколкова нелинейной фильтрации, которая описывает процесс фильтрации вязкоупругой несжимаемой жидкости. В данной модели управление внешним воздействием (истоки и стоки жидкости соответственно) направлено на достижение требуемого давления жидкости в пласте с наименьшими затратами (модель регулирования давления фильтрующейся жидкости). Различные начально-краевые задачи для уравнения (2) в разных аспектах были исследованы А.П. Осколковым¹ в случае положительности параметра λ .

Математическая модель динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим систему уравнений движения жидкости Кельвина – Фойгта, которую принято называть системой уравнений Осколкова

$$(1 - \varkappa \nabla^2)x_t = \nu \nabla^2 x - (x \cdot \nabla)x - \mathbf{p} + u, \quad \nabla(\nabla \cdot x) = 0, \quad (3)$$

где $\mathbf{p} = \nabla p$ – градиент давления; вектор-функция $x = x(s, t) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор скорости жидкости; $u = u(s, t) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ – вектор объемных внешних сил, характеризующий внешнее воздействие; коэффициент системы \varkappa^{-1} – время ретардации, характеризующее упругие свойства жидкости; $\nu \in \mathbb{R}_+$ – кинематический коэффициент вязкости, характеризующий вязкие свойства жидкости Кельвина – Фойгта нулевого порядка. Условие Дирихле (1) и уравнение (3) образуют математическую модель динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости, которая описывает процесс движения жидкости Кельвина – Фойгта нулевого порядка. В данной модели управление внешним воздействием направлено на достижение с наименьшими затратами требуемой скорости движения жидкости (модель регулирования скорости движения жидкости Кельвина – Фойгта нулевого порядка). А.П. Осколков² построил теорию глобальной разрешимости задачи Коши – Дирихле для невырожденного уравнения (3) на $[0, +\infty)$ в слабом смысле в случае $n = 3$. В работе М.О. Корпусова и А.Г. Свешникова рассмотрен вопрос разрушения решения системы уравнений Осколкова с кубическим источником в классе слабых обобщенных решений.

¹ Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения нелинейных вязкоупругих жидкостей / А.П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1985. – Т. 147. – С. 110–119.

² Осколков, А.П. О некоторых нестационарных линейных и квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей / А.П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1976. – Т. 59. – С. 133–137.

Обобщенная математическая модель Хоффа. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим условие Дирихле (1) для обобщенного уравнения Хоффа

$$(-\lambda - \Delta)x_t + \alpha_1x + \alpha_2x^3 + \alpha_2x^5 + \dots + \alpha_{k-1}x^{2k-3} + \alpha_kx^{2k-1} = u. \quad (4)$$

Уравнение (4) получено Н.Дж. Хоффом³ в случае $n = 1$. Искомая функция $x = x(s, t)$ показывает отклонение балки от вертикали под действием постоянной нагрузки $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Параметры $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$, $j = 1, \dots, k$, характеризуют свойства материала балки; свободный член $u = u(s, t)$ соответствует внешней (боковой, в случае $n = 1$) нагрузке. Условие Дирихле (1) и уравнение (4) образуют математическую модель изменения формы двутавровой балки, находящейся под постоянной нагрузкой λ . Оптимальное управление позволяет определять наименьшее внешнее воздействие (нагрузку $u(s, t)$), при помощи которого двутавровая балка примет требуемую форму. Однозначная разрешимость задачи Коши для модели (1), (4) была установлена Г.А. Свиридиюком⁴.

Обобщенная математическая модель деформации конструкции из двутавровых балок. Рассмотрим конечный связный ориентированный граф $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathcal{V}; \mathcal{E})$, где $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=1}^M$ – множество вершин, а $\mathcal{E} = \{E_j\}_{j=1}^N$ – множество дуг. Предположим, что каждая дуга имеет длину $l_j > 0$ и площадь поперечного сечения $d_j > 0$. На графе \mathbf{G} рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned} -\lambda x_{jt} - x_{jtss} + \alpha_j^1 x_j + \alpha_j^2 x_j^3 + \dots + \alpha_j^k x_j^{2k-1} = u_j \\ \text{для всех } s \in (0, l_j), t \in \mathbb{R}, j = 1, N. \end{aligned} \quad (5)$$

Для уравнений (5) в каждой вершине V_i , $i = \overline{1, M}$, зададим краевые условия

$$\sum_{j: E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j x_{js}(0, t) - \sum_{r: E_r \in E^\omega(V_i)} d_r x_{rs}(l_r, t) = 0, \quad (6)$$

$$x_r(0, t) = x_j(0, t) = x_h(l_h, t) = x_m(l_m, t), \quad (7)$$

для всех $E_r, E_j \in E^\alpha(V_i)$, $E_h, E_m \in E^\omega(V_i)$, которые являются аналогами законов Кирхгоффа. Здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине V_i . Искомая функция $x_j = x_j(s, t)$ показывает отклонение j -й балки от вертикали под действием постоянной нагрузки $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Параметры $\alpha_j^i \in \mathbb{R}_+$ характеризуют свойства материала j -й балки; свободный член $u_j = u_j(s, t)$ соответствует внешней нагрузке на j -ый

³Hoff, N.J. Creep Buckling / N.J. Hoff // Journal of the Aeronautical Sciences. – 1956. – № 7. – P. 1–20.

⁴Свиридиюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридиюк // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1993. – Т. 57, № 3. – С. 192–207.

элемент конструкции. Краевые условия (6), (7) и уравнения (5) образуют математическую модель изменения формы двутавровых балок в конструкции. Оптимальное управление позволяет определять наименьшую боковую нагрузку $u_j(s, t)$) на j -ый элемент, при помощи которой конструкция из двутавровых балок примет требуемую форму. Уравнения Хоффа на графах⁵ впервые были изучены в случае $k = 1$.

Математическая модель распределения потенциала электрического поля в полупроводнике. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим условие Дирихле (1) для неклассического уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}(\lambda x - \Delta x) - \Delta_p x + \alpha|x|^{p-2}x = u, \quad \Delta_p x \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial s_i} \left(\left| \frac{\partial x}{\partial s_i} \right|^{p-2} \frac{\partial x}{\partial s_i} \right), \quad (8)$$

где $p > 2, \alpha \geq 0$, причем область Ω занимает полупроводник, в котором имеется источник тока свободных зарядов и он «заземлен». Условие Дирихле (1) и уравнение (8) определяет распределение потенциала электрического поля в полупроводнике. В данной модели управление внешним воздействием направлено на достижение с наименьшими затратами требуемого распределения потенциала электрического поля (модель регулирования распределения потенциала электрического поля в полупроводнике). Начально-краевая задача для уравнения (8) в случае отрицательности параметра α была исследована М.О. Корпусовым и А.Г. Свешниковым⁶, и доказаны разрешимость и единственность данной задачи в слабом обобщенном смысле.

Обобщенная фильтрационная модель Буссинеска. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим условие Дирихле (1) для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска

$$(\lambda - \Delta)x_t - \Delta(|x|^{p-2}x) = u, \quad p \geq 2. \quad (9)$$

Уравнение (9) получено Е.С. Дзекцером⁷. Здесь искомая функция $x = x(s, t)$ отвечает потенциальному скорости движения свободной поверхности фильтрующейся жидкости; параметры $\alpha \in \mathbb{R}_+, \lambda \in \mathbb{R}$ характеризуют среду; свободный член $u = u(s, t)$ соответствует внешнему воздействию. Условие

⁵Свиридов, Г.А. Уравнения Хоффа на графе / Г.А. Свиридов, В.В. Шеметова // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 1. – С. 126–131.

⁶Корпусов, М.О. О «разрушении» решения сильно нелинейного уравнения псевдопараболического типа с двойной нелинейностью / М.О. Корпусов, А.Г. Свешников // Математические заметки. – 2006. – Т. 79, № 6. – С. 879–899.

⁷Дзекцер, Е.С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод / Е.С. Дзекцер // Доклады Академии наук СССР. – 1972. – Т. 202, № 5. – С. 1031–1033.

Дирихле (1) и уравнение (9) моделируют процесс фильтрации жидкости. В данной модели управление внешним воздействием (истоки и стоки жидкости соответственно) направлено на достижение с наименьшими затратами требуемого распределения потенциала скорости движения свободной поверхности фильтрующейся жидкости (модель регулирования распределения потенциала скорости движения свободной поверхности фильтрующейся жидкости). Начально-краевые задачи для уравнения (9) в различных постановках изучались Г.А. Свиридюком и его учениками.

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(x, u) \rightarrow \min, \quad u \in \mathfrak{U}_{ad}, \quad (10)$$

где пары (x, u) удовлетворяют полулинейному уравнению

$$L \dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^k N_j(x) = u, \quad \ker L \neq \{0\} \quad (11)$$

с начальным условием Коши

$$x(0) = x_0 \quad (12)$$

или начальным условием Шоултера – Сидорова

$$L(x(0) - x_0) = 0. \quad (13)$$

Здесь $J(x, u)$ – некоторый специальным образом построенный функционал стоимости; управление $u \in \mathfrak{U}_{ad}$, где \mathfrak{U}_{ad} – некоторое непустое, замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений \mathfrak{U} . Рассматриваемые математические модели в специальным образом подобранных функциональных банаховых пространствах \mathfrak{X} и \mathfrak{U} редуцируются к абстрактному полулинейному уравнению соболевского типа (11), что позволило разработать общий метод исследования задачи оптимального управления для данного класса математических моделей и математический аппарат для реализации численных методов исследования. Задача оптимального управления для изучаемых математических моделей в данной постановке исследуется впервые.

Целью работы является математическое моделирование, аналитическое и численное исследования оптимального управления в полулинейных задачах гидродинамики и теории упругости с разработкой и реализацией в виде комплекса программ методов и алгоритмов численного решения. Для достижения поставленной цели необходимо реализовать следующие задачи:

1. Исследовать математическую модель динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости; математическую модель Осколкова нелинейной фильтрации; обобщенную математическую модель Хоффа; математическую модель деформации конструкции из двутавровых балок; математическую модель распределения потенциала электрического поля в полупроводнике; математическую фильтрационную модель Буссинеска с начальными условиями Шоултера – Сидорова или Коши.
2. Разработать численный метод исследования задачи Шоултера – Сидорова или Коши для абстрактных полулинейных математических моделей соболевского типа. Доказать сходимость численного метода.
3. Исследовать оптимальное управление в абстрактных полулинейных математических моделях соболевского типа с начальными условиями Шоултера – Сидорова или Коши.
4. Разработать численный метод исследования задачи оптимального управления для абстрактных полулинейных математических моделей соболевского типа с начальными условиями Шоултера – Сидорова или Коши.
5. Исследовать оптимальное управление в математической модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости с начальным условием Шоултера – Сидорова; математической модели Осколкова нелинейной фильтрации с начальными условиями Шоултера – Сидорова или Коши; обобщенной математической модели Хоффа с начальными условиями Шоултера – Сидорова или Коши; обобщенной математической модели деформации конструкции из двутавровых балок с начальными условиями Шоултера – Сидорова или Коши; математической модели распределения потенциала электрического поля в полупроводнике с начальными условиями Шоултера – Сидорова или Коши; обобщенной математической фильтрационной модели Буссинеска с начальными условиями Шоултера – Сидорова или Коши.
6. Разработать и реализовать комплекс программ нахождения численного решения задачи Шоултера – Сидорова или Коши для моделей, основанных на полулинейных уравнениях соболевского типа.
7. Разработать и реализовать комплекс программ нахождения численного решения задачи оптимального управления с условиями Шоултера – Сидорова или Коши для моделей, основанных на полулинейных уравнениях соболевского типа.
8. Провести вычислительные эксперименты для модельных и реальных задач, подтверждающих эффективность предложенных алгоритмов, методов, подходов.

Научная новизна. В области математического моделирования:

В диссертационной работе впервые проведены аналитическое и численное исследования полулинейных математических моделей, описывающих процессы упругости, гидродинамики, электрического поля, основанные на полулинейных уравнениях соболевского типа, и оптимального управления в них. Создана теоретическая основа для численного исследования изучаемых моделей: доказаны теоремы существования и единственности решений задачи Коши и задачи Шоултера – Сидорова для полулинейного уравнения соболевского типа с s -монотонным и p -коэрцитивным оператором, билинейным оператором.

Впервые предложен общий метод исследования задачи оптимального управления для рассматриваемого класса математических моделей; приведены необходимые условия существования оптимального управления для них. Полученные теоретические результаты позволяют системно исследовать класс изучаемых моделей и могут быть применены к обширному классу задач математической физики.

В области численных методов:

Разработаны новые алгоритмы численных методов, использующие идеи методов Галеркина, декомпозиции и многомерного покоординатного спуска с памятью, позволяющие находить приближенные решения задач оптимального управления для изучаемых полулинейных моделей математической физики. Установлена сходимость приближенных решений к точному.

В области комплексов программ:

Разработан комплекс программ нахождения приближенного решения задач Коши и Шоултера – Сидорова для полулинейных моделей соболевского типа на отрезке, прямоугольнике, круге, граfe, а также комплекс программ приближенного решения задачи оптимального управления на основе методов декомпозиции и многомерного покоординатного спуска с памятью. Разработанные комплексы программ позволяют проводить вычислительные эксперименты для модельных и реальных задач, исследовать эффективность предложенных алгоритмов, методов, подходов.

Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором лично. Достоверность полученных результатов обеспечена полными доказательствами всех утверждений, соответствующими современному уровню математической строгости.

Теоретическая и практическая значимость. Исследуемые в диссертации математические модели объединены одним классом математических

задач, для которого построена завершенная теория оптимального управления для полулинейных моделей соболевского типа с s -монотонными и p -коэрцитивными или билинейным операторами. Полученные достаточные условия существования слабого обобщенного решения задачи Коши или задачи Шоултера – Сидорова для полулинейного уравнения соболевского типа с s -монотонным и p -коэрцитивным или билинейным операторами развиваю теорию уравнений соболевского типа и теорию дифференциальных уравнений на графах.

Исследование существования оптимального управления для указанного выше класса математических моделей, разработанные численные методы решения задачи оптимального управления с доказательством сходимости приближенного решения к точному вносят вклад в развитие теории оптимального управления. Полученные абстрактные результаты применимы к исследованию математических моделей, описывающих процессы упругости, фильтрации, электрического поля.

Комплексность результатов, полученных при исследовании изучаемых математических моделей, позволяет использовать их при решении прикладных задач: модели Осколкова и Буссинеска – в гидродинамике, геологии при изучении фильтрации жидкости, в нефтедобыче; математические модели Хоффа, деформации конструкции из двутавровых балок – в теории упругости; математическую модель распределения потенциала электрического поля в полупроводнике – в электродинамике. Полученные результаты создают основу для исследования других полулинейных неклассических моделей математической физики.

Разработанные алгоритмы численных методов реализованы в виде комплекса программ (Maple 18.0, C++), с помощью которых были проведены вычислительные эксперименты, представлены возможности предлагаемых подходов и методов численного исследования. Комплекс программ построен на модульной основе, что позволяет использовать модули при разработке других программ для исследования различных математических моделей.

Методы исследования основаны на использовании современных методов математического моделирования, функционального анализа, теории оптимального управления. Для изучения вопроса разрешимости задачи Коши (11), (12) и задачи Шоултера – Сидорова (11), (13) существенным является построение и исследование фазового пространства исходного уравнения. Главным методом исследования является метод фазового пространства, ос-

новы которого были разработаны Г.А. Свиридиюком и Т.Г. Сукачевой⁸. Для изучения вопроса существования решения задачи Коши и задачи Шоуолтера – Сидорова для уравнения (11) с самосопряженным, неотрицательно определенным, фредгольмовым оператором L и s -монотонным и p -коэрцитивным оператором M наряду с методом фазового пространства используется метод монотонности, а при построении приближенных решений – модифицированный метод Галеркина. Для изучения вопроса существования решения задачи Шоуолтера – Сидорова для уравнения (11) с билинейным оператором M наряду с методом фазового пространства используется метод монотонности в сочетании с методом компактности.

Исследование существования решения задач оптимального управления (10) – (12) и (10), (11), (13) опирается на метод монотонности и компактности. Приближенные решения строятся на основе модифицированного метода Галеркина с использованием метода декомпозиции. Он позволяет переходить к рассмотрению эквивалентной задачи, в которой исходное уравнение состояния редуцируется к системе линейных относительно искомого состояния x уравнений. Далее применяются известные методы минимизации функционала на заданном множестве допустимых управлений. Кроме того, разработан метод, в котором уравнение состояния рассматривается как ограничение, налагаемое на систему. Задача минимизации заданного функционала на множестве допустимых пар «управление – состояние» решается методом многошагового покоординатного спуска с памятью с использованием основных идей алгоритма, разработанного А.В. Келлер.

Апробация. Результаты, изложенные в диссертации, докладывались на VI международной конференции, посвященной 105-летию со дня рождения акад. М.А. Лаврентьева, «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (Новосибирск, 2005), Всероссийской научной конференции «Математика, механика, информатика» (Челябинск, 2006), Международной конференции «Тихонов и современная математика» (Москва, 2006), Международной конференции по дифференциальным уравнениям, посвященной 100-летию со дня рождения Я.Б. Лопатинского (Львов, Украина, 2006), Международной конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвященной 100-летию со дня рождения акад. И.Н. Векуа (Новосибирск, 2007), X всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Сочи, 2009), Международной конференции «Воро-

⁸Свиридиюк, Г.А. Фазовые пространства одного класса операторных полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридиюк, Т.Г. Сукачева // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26, № 2. – С. 250–258.

нежская зимняя математическая школа» (Воронеж, 2012), Всероссийском научном семинаре «Неклассические уравнения математической физики», посвященном 65-летию проф. В.Н. Врагова (Якутск, 2010), Международной конференции «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», посвященной 90-летию со дня рождения акад. Н.Н. Яненко (Новосибирск, 2011), Всероссийской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», (Самара, 2011), Международной конференции «Алгоритмический анализ неустойчивых задач», посвященной памяти В.К. Иванова (Екатеринбург, 2011), XIII всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Москва, 2012), Международной научно-практической конференции «Измерения: состояние, перспективы развития» (Челябинск, 2012), XXIII национальном научном симпозиуме с международным участием «Metrology and Metrology Assurance 2013» (Созополь, Болгария, 2013), Международной конференции «Международная летняя математическая школа памяти В.А. Плотникова» (Одесса, Украина, 2013), Международной конференции «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений», посвященной 105-летию со дня рождения С.Л. Соболева (Новосибирск, 2013), Международной конференции «Semigroups of Operators: Theory and Applications» (Бжедлево, Польша, 2013), Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Сузdalь, 2014), XII всероссийском совещании по проблемам управления (Москва, 2014), Всероссийской конференции с международным участием «Алгоритмический анализ неустойчивых задач», посвященной памяти В.К. Иванова (Челябинск, 2014), Международном симпозиуме «Вырожденные полугруппы и пропагаторы уравнений соболевского типа» (Челябинск, 2014), XV всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Сочи, 2014).

Ряд результатов диссертационного исследования был представлен и обсужден на семинарах профессора Г.А. Свиридиюка в Южно-Уральском государственном университете (г. Челябинск), профессора А. Фавини в Болонском университете (г. Болонья, Италия).

Результаты диссертационного исследования были представлены и обсуждены на Всероссийской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», (Самара, 2015), на XVI всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Челябинск, 2015), семинаре профессора С.И. Кадченко в Магнитогорском государственном техническом университете им. Носова (г. Магнитогорск).

Публикации. По результатам диссертации опубликовано 57 научных работ, в том числе: 16 статей [1 – 16] опубликованы в рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ, из них 7 статей [1, 3, 4, 9, 12, 13, 15] – в изданиях, индексируемых базой данных Scopus, а также 4 свидетельства о регистрации программ [18 – 21]. Из совместных работ [1 – 3, 6 – 11, 15, 16, 27, 28, 30] в диссертацию вошли только результаты, полученные автором лично.

Структура и объем работы. Диссертационная работа объемом 255 страниц содержит введение, пять глав, заключение, приложения и список литературы, включающий 220 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во введении обосновываются актуальность темы исследования, постановка задачи, определяются цель и задачи работы,дается обзор методов исследования по проблематике диссертации.

Первая глава посвящена построению математических моделей, которые можно отнести к классу полулинейных моделей соболевского типа, и состоит из девяти параграфов. В первом и втором параграфах содержатся некоторые сведения нелинейного функционального анализа, о функциональных пространствах и дифференциальных операторах, используемые в дальнейшем исследовании и построении математических моделей. Данные параграфы носят вспомогательный характер. Третий параграф посвящен исследованию морфологии фазового пространства уравнения (11) в эволюционном и динамическом случаях.

Пусть $\mathcal{H} = (\mathcal{H}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным; $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^*)$ и $(\mathfrak{B}_j, \mathfrak{B}_j^*)$, $j = \overline{1, k}$, $k \in \mathbb{N}$ – дуальные (относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$) пары рефлексивных банаховых пространств. Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ – линейный, непрерывный, самосопряженный, неотрицательно определенный, фредгольмов оператор, чей ортонормальный (в смысле \mathcal{H}) набор собственных векторов $\{\varphi_k\}$ образует базис в пространстве \mathfrak{H} , а $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ – линейный, непрерывный, симметричный, 2-коэрцитивный оператор. Пусть $N_j \in C^r(\mathfrak{B}_j; \mathfrak{B}_j^*)$, $r \geq 1$, $j = \overline{1, k}$ – s-монотонные и p_j -коэрцитивные операторы, где $p_j \geq 2$ и $p_k = \max_j p_j$, имеющие симметричную производную Фреше.

Динамический случай. Пусть вложения

$$\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}_k \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathfrak{B}_1 \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}_1^* \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathfrak{B}_k^* \hookrightarrow \mathfrak{H}^*$$

плотны и непрерывны. Сделаем допущение:

$$(\mathbb{I} - Q)u \text{ не зависит от } t \in (0, T), \quad (14)$$

здесь оператор Q – проектор вдоль $\text{coker } L$ на $\text{im } L$. Рассмотрим множество

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \{x \in \mathfrak{H} : (\mathbb{I} - Q)Mx + (\mathbb{I} - Q) \sum_{j=1}^k N_j(x) = (\mathbb{I} - Q)u\}, & \text{если } \ker L \neq \{0\}; \\ \mathfrak{H}, & \text{если } \ker L = \{0\}. \end{cases}$$

Теорема 1. (1.3.1)⁹ Пусть выполнено условие (14), тогда множество \mathfrak{M} есть банахово C^r -многообразие, диффеоморфно проектирующееся вдоль $\ker L$ на $\text{coim } L$ всюду, за исключением, быть может, точки нуль.

Эволюционный случай. Пусть вложения

$$\mathfrak{B}_k \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathfrak{B}_1 \hookrightarrow \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{H}^* \hookrightarrow \mathfrak{B}_1^* \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathfrak{B}_k^*$$

плотны и непрерывны. Рассмотрим множество

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \{x \in \mathfrak{B}_k : (\mathbb{I} - Q)Mx + (\mathbb{I} - Q) \sum_{j=1}^k N_j(x) = (\mathbb{I} - Q)u\}, & \text{если } \ker L \neq \{0\}; \\ \mathfrak{B}_k, & \text{если } \ker L = \{0\}, \end{cases}$$

здесь Q – проектор пространства \mathfrak{B}_k^* вдоль $\text{coker } L$ на $\overline{\text{im } L}$, где $\overline{\text{im } L}$ замыкание $\text{im } L$ в топологии \mathfrak{B}_k^* .

Теорема 2. (1.3.2) Пусть выполнено условие (14), тогда множество \mathfrak{M} есть банахово C^r -многообразие, диффеоморфно проектирующееся вдоль $\ker L$ на $\tilde{\mathfrak{B}}_k = \text{coim } L \cap \mathfrak{B}_k$ всюду, за исключением, быть может, точки нуль.

Параграфы с четвертого по девятый содержат аналитическое исследование математической модели Осколкова нелинейной фильтрации (1), (2); математической модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости (1), (3); обобщенной математической модели Хоффа (1), (4); обобщенной математической модели деформации конструкции из двутавровых балок (5) – (7); модели распределения потенциала электрического поля в полупроводнике (1), (8); обобщенной математической фильтрационной модели Буссинеска (1), (9). Проводится и обосновывается редукция математических моделей к абстрактному уравнению (11), и строятся фазовые пространства уравнений.

⁹В скобках указана нумерация в диссертации.

Вторая глава содержит шесть параграфов и посвящена исследованию абстрактной задачи оптимального управления. Первый параграф посвящен исследованию разрешимости задачи Коши (11), (12) для динамического и эволюционного случаев. Рассмотрим динамический случай. Построим пространство

$$\mathfrak{X} = \{x \mid x \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_{p_k}(0, T; \mathfrak{M}), \quad \dot{x} \in L_2(0, T; \mathfrak{H})\}.$$

Определение 1. (2.1.1) *Слабым обобщенным решением* уравнения (11) назовем вектор-функцию $x \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющую условию

$$\int_0^T \varphi(t) \left[\left\langle L \frac{d}{dt} x, w \right\rangle + \langle Mx, w \rangle + \sum_{j=1}^k \langle N_j(x), w \rangle \right] dt = \int_0^T \varphi(t) \langle u, w \rangle dt \\ \forall w \in \mathfrak{H}, \forall \varphi \in L_2(0, T).$$

Решение уравнения (11) назовем *решением задачи Коши*, если оно удовлетворяет (12).

Построим галеркинские приближения решения задачи (11), (12). Для этого выберем в \mathfrak{H} ортонормальную (в смысле \mathcal{H}) тотальную систему $\{\varphi_i\}$ так, чтобы $\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l\} = \ker L$, $\dim \ker L = l$. Построим галеркинские приближения решения задачи (11), (12) в виде

$$x^m(t) = \sum_{i=1}^m a_i(t) \varphi_i, \quad m > l, \tag{15}$$

где коэффициенты $a_i = a_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ определяются следующей задачей:

$$\left\langle L \frac{dx^m}{dt}, \varphi_i \right\rangle + \left\langle Mx^m + \sum_{j=1}^k N_j(x^m), \varphi_i \right\rangle = \langle u, \varphi_i \rangle, \quad \langle x^m(0) - x_0, \varphi_i \rangle = 0,$$

$$x^m(0) \rightarrow x_0 \text{ сильно в пространстве } \mathfrak{H}.$$

Теорема 3. (2.1.1) *При любых $x_0 \in \mathfrak{M}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)$ таких, что выполнено (14), существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}$ задачи (11), (12).*

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$L \dot{x} + \sum_{j=1}^k N_j(x) = u. \tag{16}$$

Теорема 4. (2.1.2) При любых $x_0 \in \mathfrak{M}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*)$ таких, что выполнено (14), существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}$ задачи (12), (16).

Второй параграф содержит исследование разрешимости задач Шоултера – Сидорова (11), (13) и (13), (16). Обозначим через P проектор вдоль $\ker L$ на $\text{coim } L$. Положим $x^1 = Px_0 \in \text{coim } L$. Построим пространство

$$\mathfrak{X}_1 = \{x \mid x \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k), \dot{x}^1 \in L_2(0, T; \text{coim } L)\}.$$

Тогда справедливы теоремы существования и единственности решения $x \in \mathfrak{X}_1$ задач (11), (13) и (13), (16) для любого $x_0 \in \mathfrak{H}$ для динамического и эволюционного случаев.

Третий и четвертый параграфы посвящены исследованию задач оптимального управления с начальными условиями Коши и Шоултера – Сидорова для динамического и эволюционного случаев. Рассмотрим динамический случай. Пусть дополнительно вложение $\mathfrak{H} \Subset \mathcal{H}$ компактно. Построим пространство $\mathfrak{U} = L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)$ и определим в пространстве \mathfrak{U} непустое, замкнутое и выпуклое множество \mathfrak{U}_{ad} . Рассмотрим задачу оптимального управления (10), (11), (13), где функционал стоимости

$$J(x, u) = \beta \int_0^T \|x(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} dt + (1 - \beta) \int_0^T \|u(t)\|_{\mathfrak{H}^*}^2 dt, \quad \beta \in (0, 1),$$

здесь $z_d = z_d(t)$ – требуемое состояние.

Определение 2. (2.3.1) Пару $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{U}_{ad}$ назовем *решением задачи оптимального управления* (10), (11), (13), если

$$J(\tilde{x}, \tilde{u}) = \min_{(x, u)} J(x, u),$$

где пары $(x, u) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{U}_{ad}$ удовлетворяют (11), (13) в смысле определения 1; вектор-функцию \tilde{u} назовем *оптимальным управлением*.

Теорема 5. (2.3.1) При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (10), (11), (13).

Построим пространство $\mathfrak{U}^1 = L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*)$ и определим в пространстве \mathfrak{U}^1 непустое, замкнутое и выпуклое множество \mathfrak{U}_{ad}^1 . Рассмотрим задачу оптимального управления (10), (13), (16) с функционалом штрафа

$$J(x, u) = \beta \int_0^T \|x(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} dt + (1 - \beta) \int_0^T \|u(t)\|_{\mathfrak{B}_k^*}^{q_k} dt, \quad \beta \in (0, 1).$$

Теорема 6. (2.3.2) При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (10), (13), (16).

При рассмотрении начального условия Коши необходимо на множество допустимых управлений наложить дополнительное ограничение. Рассмотрим динамический случай. Построим пространство $\mathfrak{U}^2 = \{u \in L_2(0, T; \mathfrak{H}^*) : (\mathbb{I} - Q)u = 0, t \in (0, T)\}$ и пространство $\mathfrak{U}^3 = \{u \in L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}_k^*) : (\mathbb{I} - Q)u = 0, t \in (0, T)\}$; определим $\mathfrak{U}_{ad}^2 \subset \mathfrak{U}^2$ и $\mathfrak{U}_{ad}^3 \subset \mathfrak{U}^3$ – непустые, замкнутые, выпуклые множества в пространствах управления соответственно. Тогда справедливы теоремы существования решения задач оптимального управления (10) – (12) и (10), (12), (16).

В пятом и шестом параграфах содержатся исследования разрешимости задачи оптимального управления для полулинейного уравнения с билинейным оператором и начальным условием Шоуолтера – Сидорова.

Пусть вложения $\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{H}^*$ плотны и непрерывны, а вложение $\mathfrak{H} \Subset \mathcal{H}$ компактно; $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ – линейный, непрерывный, самосопряженный, неотрицательно определенный, фредгольмов оператор, чей ортонормальный (в смысле \mathcal{H}) набор собственных векторов $\{\varphi_k\}$ образует базис в пространстве \mathfrak{H} ; $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ – линейный, непрерывный, 2-коэрцитивный оператор; билинейный непрерывный оператор $B : \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}^*$ такой, что

$$| \langle B(x, y), z \rangle | \leq C^B \|x\|_{\mathfrak{H}} \|y\|_{\mathfrak{H}} \|z\|_{\mathfrak{H}} \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{H};$$

$$\langle B(x, y), z \rangle = - \langle B(x, z), y \rangle \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{H}; \quad \langle B(y, x), x \rangle = 0 \quad \forall y, x \in \mathfrak{H}.$$

Рассмотрим полулинейное уравнение соболевского типа

$$L \dot{x} + Mx + B(x, x) = u. \quad (17)$$

Построим пространство $\mathfrak{X} = \{x \mid x \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_2(0, T; \mathfrak{H})\}$.

Определение 3. (2.5.1) Слабым обобщенным решением уравнения (17) назовем вектор-функцию $x \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющую условию

$$\begin{aligned} \int_0^T \varphi(t) \left[\left\langle L \frac{dx}{dt}, w \right\rangle + \langle Mx, w \rangle + \langle B(x, x), w \rangle \right] dt &= \int_0^T \varphi(t) \langle u, w \rangle dt \\ \forall w \in \mathfrak{H}, \forall \varphi \in L_2(0, T). \end{aligned} \quad (18)$$

Решение уравнения (17) назовем *решением задачи Шоуолтера – Сидорова*, если оно удовлетворяет (13).

Теорема 7. (2.5.1) При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)$ существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}$ задачи (13), (17).

Построим пространство управлений $\mathfrak{U} = L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)$ и определим в пространстве \mathfrak{U} непустое, замкнутое и выпуклое множество \mathfrak{U}_{ad} .

Теорема 8. (2.6.1) При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (10), (13), (17).

Третья глава посвящена исследованию задач оптимального управления для математических моделей процессов фильтрации, деформации и электрического поля и состоит из шести параграфов. На основе абстрактных результатов второй главы находятся условия существования решения задачи оптимального управления для рассматриваемых моделей. Обозначим через $\{\varphi_k\}$ последовательность собственных функций однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $(-\Delta)$ в области Ω , а через $\{\lambda_k\}$ – соответствующую последовательность собственных значений, занумерованную по неубыванию с учетом кратности.

В первом параграфе изучается задача оптимального управления для математической модели Осколкова нелинейной фильтрации. Доказаны теоремы существования и единственности слабого обобщенного решения задач Коши и Шоултера – Сидорова для изучаемой модели, найдены достаточные условия существования решения задачи оптимального управления, построены необходимые условия оптимального управления.

Теорема 9. (3.1.3) Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и $n > 2$, $2 \leq p \leq 2 + \frac{4}{n-2}$ или $n = 2$, $p \in (1, +\infty)$, тогда при любых $x_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует оптимальное управление в задаче (1), (2), (10), (13).

Теорема 10. (3.1.5) Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и $n > 2$, $2 \leq p \leq 2 + \frac{4}{n-2}$ или $n = 2$, $p \in (1, +\infty)$, если u – оптимальное управление в задаче (10), то существует вектор-функция $y \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ такая, что

$$\begin{aligned} & (\lambda - \Delta)x_t - \alpha\Delta x + |x|^{p-2}x = u, \\ & (-\lambda + \Delta)y_t - \alpha\Delta y + (p-1)|x|^{p-2}y = (-\Delta)(x(u) - z_d), (s, t) \in Q_T, \\ & x(s, t) = y(s, t) = 0, (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ & (\lambda - \Delta)(x(s, 0) - x_0(s)) = 0, (-\lambda + \Delta)y(s, T) = 0, s \in \Omega, \\ & \int_{Q_T} (y + N(-\Delta)^{-1}(u))(v - u)dsdt \geq 0 \quad \forall v \in \mathfrak{U}_{ad} \subset L_2(0, T; W_2^{-1}(\Omega)). \end{aligned}$$

Во втором параграфе исследуется задача оптимального управления для математической модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости. Получены условия существования слабого обобщенного решения и достаточные условия существования решения задачи оптимального управления с условием Шоултера – Сидорова. Третий параграф посвящен изучению задачи оптимального управления для обобщенной математической модели Хоффа. Доказаны теоремы существования и единственности слабого обобщенного решения задач Коши и Шоултера – Сидорова для изучаемой модели, найдены достаточные условия существования решения задачи оптимального управления, построены необходимые условия оптимального управления.

В четвертом параграфе изучается задача оптимального управления для математической модели деформации конструкции из двутавровых балок. Доказаны теоремы существования и единственности слабого обобщенного решения задач Коши и Шоултера – Сидорова для изучаемой модели, найдены достаточные условия существования решения задачи оптимального управления, построены необходимые условия оптимального управления в случае $k = 1$. Пусть $\mathfrak{H} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots) : x_j \in W_2^1(0, l_j)\}$ и выполнено условие $(7)\}, \mathfrak{U}_{ad} \subset L_{\frac{2k}{2k-1}}(0, T; L_{\frac{2k}{2k-1}}(\mathbf{G}))$.

Теорема 11. (3.4.3) *Пусть $\lambda + a \leq \mu_1$, $\alpha_j^n \in \mathbb{R}_+$, $n = 1, \dots, k$, тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{H}$ существует оптимальное управление в задаче (5) – (7), (10), (13).*

Теорема 12. (3.4.5) *Пусть $\lambda + a \leq \mu_1$, $\alpha_j^1, \alpha_j^2 \in \mathbb{R}_+$, если u – оптимальное управление в задаче (10), то существует вектор $y \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_2(0, T; \mathfrak{H})$ такой, что*

$$\begin{aligned} -\lambda x_{jt} - x_{jtss} + \alpha_j^1 x_j + \alpha_j^2 x_j^3 &= u_j, \quad \text{для всех } s \in (0, l_j), \quad t \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, N}, \\ \lambda y_{jt} + y_{jtss} + \alpha_j^1 y_j + \alpha_j^2 3x_j^2 y &= (x_j - z_{jd})^3, \quad \text{для всех } s \in (0, l_j), \quad t \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, N}, \\ \sum_{j:E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j x_{js}(0, t) - \sum_{r:E_r \in E^\omega(V_i)} d_r x_{rs}(l_r, t) &= 0, \\ x_r(0, t) &= x_j(0, t) = x_h(l_h, t) = x_m(l_m, t), \\ \sum_{j:E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j y_{js}(0, t) - \sum_{r:E_r \in E^\omega(V_i)} d_r y_{rs}(l_r, t) &= 0, \\ y_r(0, t) &= y_j(0, t) = y_h(l_h, t) = y_m(l_m, t), \\ (\lambda + \Delta)(x_j(s, 0) - x_{0j}(s)) &= 0, \quad \text{для всех } s \in (0, l_j), \end{aligned}$$

$$(\lambda + \Delta)(y_j(s, T) - y_{0j}(s)) = 0, \text{ для всех } s \in (0, l_j),$$

$$\int_0^T \varphi(t) \left[\sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} (y_j + u_j^{\frac{1}{3}})(v_j - u_j) ds \right] dt \geq 0 \quad \forall v \in \mathfrak{U}_{ad}.$$

Пятый параграф содержит изучение задачи оптимального управления для модели распределения потенциала электрического поля в полупроводнике. Доказаны теоремы существования и единственности слабого обобщенного решения задач Коши и Шоултера – Сидорова для изучаемой модели, найдены достаточные условия существования решения задачи оптимального управления, посторены необходимые условия оптимального управления.

Теорема 13. (3.5.3) Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, тогда при любых $x_0 \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega)$ существует оптимальное управление в задаче (1), (8), (10), (13).

Теорема 14. (3.5.5) Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, если u – оптимальное управление в задаче (10), то существует вектор $y \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_p(0, T; \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega))$ такой, что

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\lambda x - \Delta x) - \Delta_p x + \alpha \lambda |x|^{p-2} x = u, \\ & \frac{\partial}{\partial t}(-\lambda + \Delta)y - \frac{\partial}{\partial s_i}((p-1)|x_{s_i}|^{p-2})y + \alpha(p-1)|x|^{p-2}y = \\ & = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial s_i} \left(\left| \frac{\partial}{\partial s_i}(x(u) - z_d) \right|^{p-1} \right) \text{sign} \left(\frac{\partial}{\partial s_i}(x(u) - z_d) \right), \\ & x(s, t) = y(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ & (\lambda - \Delta)(x(s, 0) - x_0(s)) = 0, \quad (\lambda - \Delta)y(s, T) = 0, \quad s \in \Omega, \\ & \int_{Q_T} y(u - v) ds dt + \int_0^T \|u\|_{W_q^{-1}(\Omega)}^{q-1} (\|u\|_{W_q^{-1}(\Omega)})'_u (v - u) dt \geq 0 \\ & \forall v \in \mathfrak{U}_{ad} \subset L_q(0, T; W_q^{-1}(\Omega)). \end{aligned}$$

В шестом параграфе изучается задача оптимального управления для математической фильтрационной модели Буссинеска (1), (9). Доказаны теоремы существования и единственности слабого обобщенного решения задач Коши и Шоултера – Сидорова для изучаемой модели, найдены достаточные условия существования решения задачи оптимального управления, посторены необходимые условия оптимального управления.

Четвертая глава содержит восемь параграфов и посвящена построению алгоритмов и описанию программ для численного исследования задач оптимального управления, изученных в главах 2 и 3. В первом параграфе исследуется применение метода декомпозиции для полулинейной задачи оптимального управления (10), (11), (13). Показано, что задача (10), (11), (13) эквивалентна задаче

$$\begin{aligned} L \dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^k N_j(v) &= u, \quad x(u, v) = v, \\ L(x(0) - x_0) &= 0, \quad u \in \mathfrak{U}_{ad}, \quad v \in L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} J_\theta(x, u, v) &= \theta \cdot \beta \int_0^T \|x(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} dt + \\ &+ (1 - \theta) \cdot \beta \int_0^T \|v(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} dt + (1 - \beta) \int_0^T \|u(t)\|_{\mathfrak{H}^*}^2 dt \rightarrow \inf. \end{aligned} \quad (20)$$

Теорема 15. (4.1.2) При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (19), (20).

Во втором параграфе описывается метод штрафа для нахождения приближенных решений задачи (19), (20). Доказывается теорема о сходимости данного метода. Рассмотрим

$$\begin{aligned} L \dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^k N_j(v) &= u, \quad L(x(0) - x_0) = 0, \\ u \in \mathfrak{U}_{ad}, \quad v \in L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k), \end{aligned} \quad (21)$$

и задачу управления

$$J_\theta^\varepsilon(x, u, v) \rightarrow \inf, \quad (22)$$

здесь функционал стоимости задан в виде

$$\begin{aligned} J_\theta^\varepsilon(x, u, v) &= \theta \cdot \beta \int_0^T \|x(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} dt + (1 - \theta) \cdot \beta \int_0^T \|v(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}_k}^2 dt + \\ &+ (1 - \beta) \int_0^T \|u(t)\|_{\mathfrak{H}^*}^2 dt + r_\varepsilon \int_0^T \|x(t) - v(t)\|_{\mathcal{H}}^2 dt, \quad \theta \in (0, 1), \end{aligned}$$

где $x(t)$ есть решение задачи (21), а параметр штрафа $r_\varepsilon \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$.

Теорема 16. (4.2.1) При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon > 0$ существует решение $(x_\varepsilon, v_\varepsilon, u_\varepsilon)$ задачи (21), (22).

Теорема 17. (4.2.2) При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$ и при $\varepsilon \rightarrow 0+$ существует последовательность $\{v_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ такая, что

$$v_\varepsilon \rightarrow \tilde{v}, \quad u_\varepsilon \rightarrow \tilde{u},$$

где пара $(\tilde{v}, \tilde{u}) = (\tilde{x}, \tilde{u})$ – решение задачи (10), (11), (13).

Третий параграф посвящен разработке алгоритма численного метода нахождения приближенного решения задач Коши и Шоултера – Сидорова для полулинейного уравнения соболевского типа (11) на основе методов фазового пространства и Галеркина. Четвертый параграф посвящен разработке алгоритма численного решения задач оптимального управления (10) – (12) и (10), (11), (13) на основе методов декомпозиции и штрафа, разработанных в пп. 4.1 и 4.2, и методов фазового пространства, Галеркина и Ритца. Приведем алгоритм данного метода. Приближенное решение задачи (19), (20) будем искать в виде

$$\tilde{x}(s, t) = \sum_{i=1}^m a_i(t) \varphi_i(s), \quad \tilde{v}(s, t) = \sum_{i=1}^m v_i(t) \varphi_i(s), \quad \tilde{u}(s, t) = \sum_{i=1}^m u_i(t) \varphi_i(s).$$

Подставим галеркинские суммы в уравнение (19). Затем скалярно умножим полученное уравнение на собственные функции $\varphi_i(s)$, $i = 1, \dots, m$, в \mathcal{H} и получим систему уравнений

$$\langle L\tilde{x}_t, \varphi_i \rangle + \langle M\tilde{x}, \varphi_i \rangle + \left\langle \sum_{j=1}^k N_j(\tilde{v}), \varphi_i \right\rangle = \langle \tilde{u}, \varphi_i \rangle, \quad i = 1, \dots, m. \quad (23)$$

В зависимости от параметра λ уравнения системы (23) могут получаться дифференциальными или алгебраическими. Из получившейся системы алгебро-дифференциальных уравнений с соответствующими начальными условиями выразим неизвестные функциональные коэффициенты $a_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, в приближенном решении $\tilde{x}(s, t) = x^m(s, t)$ через $v_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, $u_i(t)$, $i = 1, \dots, m$.

Перейдем к нахождению минимума функционала. Для этого подставим получившееся представление для $\tilde{x}(s, t)$, $\tilde{v}(s, t)$, $\tilde{u}(s, t)$ в функционал стоимости. Затем, опираясь на метод Ритца, будем искать неизвестные $v_i(t)$, $i =$

$1, \dots, m$, $u_i(t)$, $i = r, \dots, m$, в виде

$$v_i(t, N) = \sum_{n=1}^N b_n \sin\left(\frac{\pi n t}{l}\right), \quad u_i(t, N) = \sum_{n=1}^N c_n \sin\left(\frac{\pi n t}{l}\right) \quad (24)$$

или

$$v_i(t, N) = \sum_{n=0}^N b_n t^n, \quad u_i(t, N) = \sum_{n=0}^N c_n t^n, \quad (25)$$

выбирая коэффициенты b_n и c_n так, чтобы функции $v_i(t, N)$, $u_i(t, N)$ доставляли минимум функционалу. Таким образом, задача свелась к отысканию экстремума функции $2(N+1) \cdot m$ переменных.

Пятый параграф посвящен разработке алгоритма численного решения задач оптимального управления (10) – (12) и (10), (11), (13) на основе метода многошагового покоординатного спуска с памятью. Шестой параграф содержит описание программ, предназначенных для нахождения приближенного решения задач Коши и Шоултера – Сидорова для полулинейных моделей фильтрации и деформации. Седьмой и восьмой параграфы содержат описание программ «Численное исследование задачи оптимального управления для полулинейных моделей фильтрации», «Численное исследование задачи оптимального управления для полулинейных моделей соболевского типа», предназначенных для нахождения приближенного решения задачи оптимального управления.

Пятая глава посвящена нахождению приближенных решений математических моделей и задач оптимального управления процессов фильтрации, деформации и электрического поля и состоит из пяти параграфов. В ней приведены результаты вычислительных экспериментов для модельных и реальных задач. Исследована эффективность предложенных численных методов и алгоритмов.

Пример 1. Рассмотрим задачу управления (1), (2), (10), (13) в случае $n = 2$, $\lambda = -2$, $\alpha = 1$, $T = 1$, $\theta = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{99}{100}$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$, $m = 2$, $N = 3$, $x_0 = \frac{2}{\pi} ((\sin s_1 \sin s_2 + 2 \sin(2s_1) \sin(s_2) + \sin(2s_1) \sin(2s_2) + 2 \sin(s_1) \sin(2s_2))$,

$$z_d(s_1, s_2, t) = \frac{2}{\pi} (\sin s_1 \sin s_2 + (t+2) \sin(s_1) \sin(2s_2) + \sin(2s_1) \sin(2s_2) + (t^2 + 2) \sin(2s_1) \sin(s_2)).$$

В результате работы программы «Численное исследование задачи оптимального управления для полулинейных моделей фильтрации» были найдены

коэффициенты управления и значение функционала $J_\theta^\varepsilon = 7.259320$. Графики приближенного решения $(\tilde{x}(s, t), \tilde{v}(s, t), \tilde{u}(s, t))$ изображены на рис. 1 и 2. На рис. 2 видно, что плановое состояние системы $z_d(s_1, s_2, t)$ в интегральном смысле мало отличается от оптимального состояния $\tilde{x}(s_1, s_2, t)$, а функции $\tilde{x}(s_1, s_2, t)$ и $\tilde{v}(s_1, s_2, t)$ близки друг к другу.

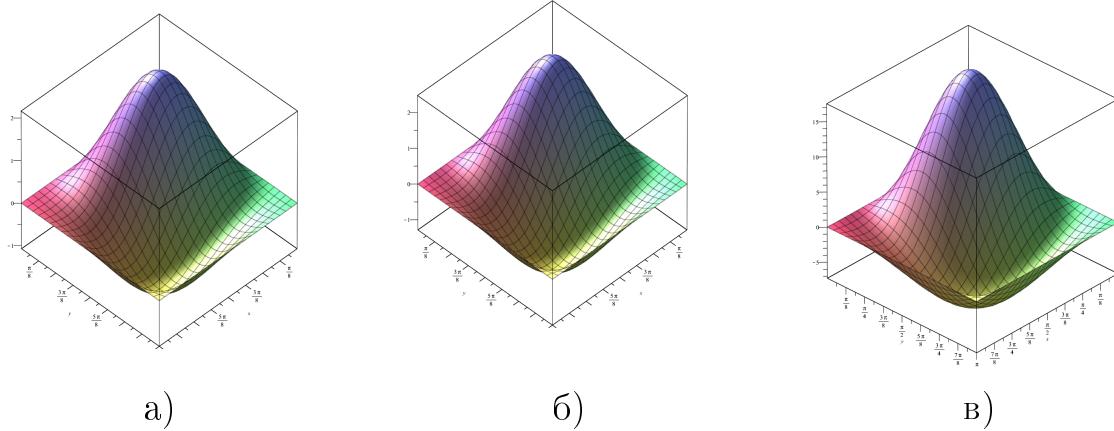


Рис. 1. График приближенного решения задачи (1), (2), (10), (13): а) функция $\tilde{x}(s_1, s_2, 1)$; б) функция $\tilde{v}(s_1, s_2, 1)$; в) функция $\tilde{u}(s_1, s_2, 1)$ в момент времени $t = 1$

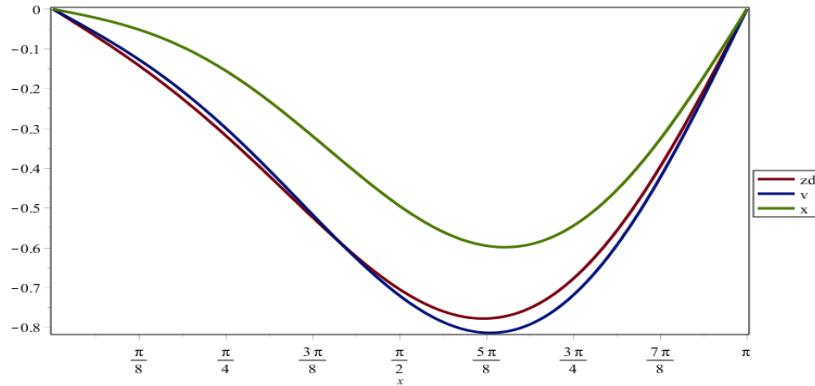


Рис. 2. График численного решения задачи (1), (2), (10), (13) при $t = 1$ и $s_2 = \frac{7\pi}{8}$

Пример 2. Требуется найти приближенное решение задачи (1), (4), (10), (13) в случае $\lambda = 1$, $\alpha = 1$, $\alpha_1 = 2$, $l = \pi$, $T = 1$, $\theta = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{99}{100}$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$, $x_0(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sin s + 2 \sin(2s) + 2 \sin(3s))$, $z_d(s, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sin s + (t+2) \sin(2s) + (t^2+2) \sin(3s))$, $m = 3$, $N = 3$. В результате работы программы были найдены коэффициенты управления и значение функционала $J_\theta^\varepsilon = 4.098527$. Графики приближенного решения $(\tilde{x}(s, t), \tilde{v}(s, t), \tilde{u}(s, t))$ изображены на рис. 3. Проведенный эксперимент показывает, что плановый профиль балки $z_d(s, t)$

в интегральном смысле мало отличается от оптимального $\tilde{x}(s, t)$, а $\tilde{x}(s, t)$ и $\tilde{v}(s, t)$ близки друг к другу.

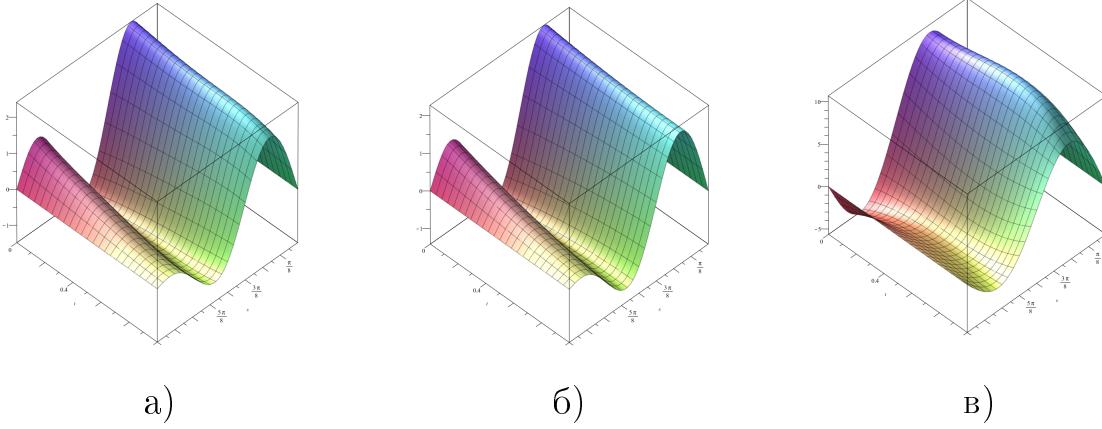


Рис. 3. График приближенного решения задачи (1), (4), (10), (13): а) функция $\tilde{x}(s, t)$; б) функция $\tilde{v}(s, t)$; в) функция $\tilde{u}(s, t)$

Пример 3. Требуется найти приближенное решение задачи (5) – (7), (10), (13) на ориентируемом графе \mathbf{G} , состоящем из двух последовательно соединенных ребер в случае трех вершин и $k = 1$, $\lambda = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta = \theta = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$, $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $l_1 = \pi$, $l_2 = \pi$, $N = 2$, $x_{01}(s) = 0.225676 \cos s$, $x_{02}(s) = -0.225676 \cos s$, $z_{1d}(s) = 0.225676(t^2 + 1) \cos s$, $z_{2d}(s) = -0.225676(t^2 + 1) \cos s$. В результате вычислений были найдены коэффициенты управления и значение функционала $J_\theta^\varepsilon = 0.758280$. Графики приближенного решения $(\tilde{x}_1(s, t), \tilde{v}_1(s, t), \tilde{u}_1(s, t))$ и $(\tilde{x}_2(s, t), \tilde{v}_2(s, t), \tilde{u}_2(s, t))$ изображены на рис. 4. Проведенный эксперимент показывает, что плановые профили балок $z_{d1}(s, t)$, $z_{d2}(s, t)$ в интегральном смысле мало отличаются от оптимальных профилей $\tilde{x}_1(s, t)$, $\tilde{x}_2(s, t)$.

Пример 4. Рассмотрим задачу (1), (9), (10), (13) в случае $\lambda = -1$, $p = 4$, $T = 1$, $\theta = \frac{1}{2}$, $m = 5$, $N = 5$, $\theta = \frac{1}{2}$, $x_0(s) = 2 \sin(s) + \sin(2s) + \sin(5s)$, $z_d(s, t) = 0.25 \sin s + (t^2 + 1) \sin(2s) + 0.6t^3 \sin(3s) + 2t \sin(4s) + \sin(5s)$. В результате работы программы «Численное исследование задачи оптимального управления для полулинейных моделей соболевского типа» были найдены коэффициенты управления и значение функционала $J = 3.971911$. Графики приближенного решения $\tilde{x}(s, t)$ и плановое состояние $z_d(s, t)$ в момент времени $t = 1$ представлены на рис. 5.

Проведенные вычислительные эксперименты показывают высокую эффективность разработанных численных методов и алгоритмов.

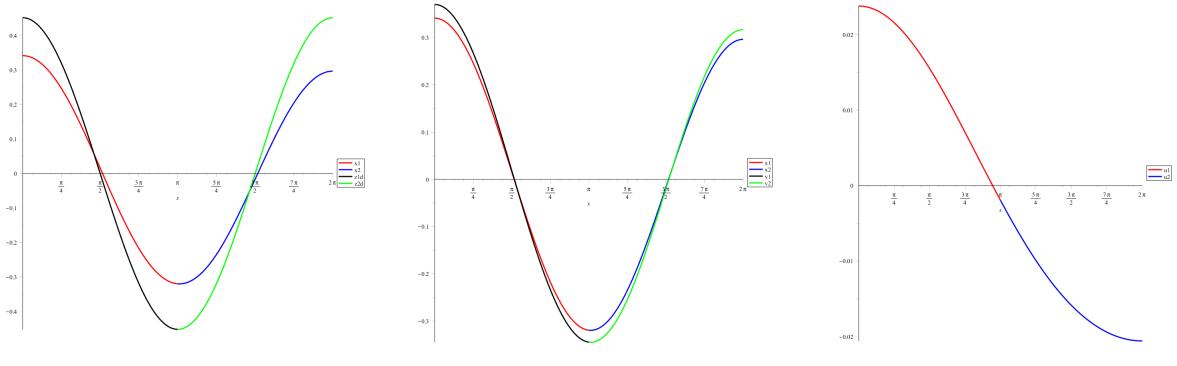


Рис. 4 График приближенного решения задачи (5) – (7), (10), (13): а) функции $\tilde{x}_1(s, 1)$, $\tilde{x}_2(s, 1)$, $z_{d1}(s, 1)$, $z_{d2}(s, 1)$; б) функции $\tilde{x}_1(s, 1)$, $\tilde{x}_2(s, 1)$, $\tilde{v}_1(s, 1)$, $\tilde{v}_2(s, 1)$; в) функции $\tilde{u}_1(s, 1)$, $\tilde{u}_2(s, 1)$

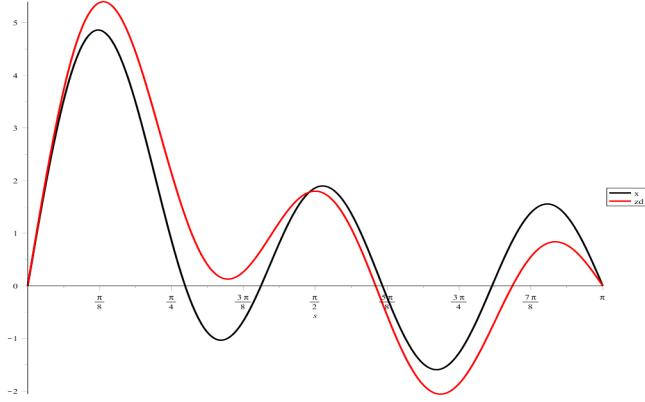


Рис. 5. График численного решения задачи (1), (9), (10), (13) при $t = 1$ и $s_2 = \frac{7\pi}{8}$

Результаты, выносимые на защиту:

В рамках развития качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей (п. 2 паспорта специальности) получены:

1. Достаточные условия существования оптимального управления в математической модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости с начальным условием Шоултера – Сидорова.

2. Достаточные условия существования оптимального управления в математической модели Осколкова нелинейной фильтрации с начальными условиями Шоултера – Сидорова или Коши; необходимые условия существования оптимального управления.

3. Достаточные условия существования оптимального управления в обобщенной математической модели Хоффа с начальными условиями Шоулте-

ра – Сидорова или Коши; необходимые условия существования оптимального управления.

4. Достаточные условия существования оптимального управления в обобщенной математической модели деформации конструкции из двутавровых балок с начальными условиями Шоуолтера – Сидорова или Коши.

5. Достаточные условия существования оптимального управления в математической модели распределения потенциала электрического поля в полупроводнике с начальными условиями Шоуолтера – Сидорова или Коши; необходимые условия существования оптимального управления.

6. Достаточные условия существования оптимального управления в обобщенной математической фильтрационной модели Буссинеска с начальными условиями Шоуолтера – Сидорова или Коши; необходимые условия существования оптимального управления.

7. Достаточные условия существования оптимального управления в математических моделях, основанных на полулинейном уравнении соболевского типа с s -монотонным и p -коэрцитивным оператором, с билинейным оператором.

В рамках разработки, обоснования и тестирования эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий (п. 3 паспорта специальности) получены:

8. Сходимость численного метода приближенного решения математических моделей как задач Коши или Шоуолтера – Сидорова для полулинейного уравнения соболевского типа с s -монотонным и p -коэрцитивным оператором.

9. Алгоритм численного метода исследования математических моделей на основе полулинейного уравнения соболевского типа с s -монотонным и p -коэрцитивным оператором.

10. Алгоритм численного метода исследования задачи оптимального управления для математических моделей с s -монотонным и p -коэрцитивным оператором на основе метода декомпозиции.

11. Алгоритм численного метода исследования задачи оптимального управления для математических моделей с s -монотонным и p -коэрцитивным оператором на основе метода многошагового покоординатного спуска с памятью.

В рамках реализации эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов (п. 4 паспорта специальности) получены:

12. Комплекс программ, реализующий алгоритмы численного метода исследования математических моделей на основе полулинейного уравнения соболевского типа с s -монотонным и p -коэрцитивным оператором на отрезке, на графике, в прямоугольнике, в круге.

13. Комплекс программ, реализующий алгоритмы численного метода исследования задачи оптимального управления для математических моделей с s -монотонным и p -коэрцитивным оператором на основе метода декомпозиции.

14. Комплекс программ, реализующий алгоритмы численного метода исследования задачи оптимального управления для математических моделей с s -монотонным и p -коэрцитивным оператором на основе метода многошагового покоординатного спуска с памятью.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки РФ для опубликования результатов диссертационного исследования:

1. Манакова, Н.А. Регулярные возмущения одного класса линейных уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридов, Н.А. Манакова // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 3. – С. 423–425.
2. Манакова, Н.А. Фазовое пространство задачи Коши – Дирихле для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Г.А. Свиридов, Н.А. Манакова // Известия вузов. Математика. – 2003. – № 9. – С. 36–41.
3. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридов, Н.А. Манакова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2005. – Т. 8, № 2. – С. 144–151.
4. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Н.А. Манакова // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43, № 9. – С. 1185–1192.
5. Манакова, Н.А. Об одной гипотезе Г.А. Свиридова / Н.А. Манакова // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2011. – Т. 4, № 4. – С. 87–93.
6. Манакова, Н.А. Об одной задаче оптимального управления с функционалом качества общего вида / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2011. – № 4. – С. 18–24.
7. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова,

А.Г. Дыльков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2011. – № 17 (234), вып. 8. – С. 113–114.

8. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для одной эволюционной модели / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Математические заметки ЯГУ. – 2012. – Т. 19, № 2. – С. 111–127.

9. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейной модели Хоффа / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Математические заметки. – 2013. – Т. 94, № 2. – С. 225–236.

10. Манакова, Н.А. Динамические модели соболевского типа с условием Шоуолтера – Сидорова и аддитивными шумами / Г.А. Свиридов, Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 90–103.

11. Манакова, Н.А. О решении задачи Дирихле – Коши для уравнения Баренблатта – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2014. – Т. 7, [№ 1]. – С. 52–60.

12. Манакова, Н.А. Метод декомпозиции в задаче оптимального управления для полулинейных моделей соболевского типа / Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 133–137.

13. Манакова, Н.А. Математические модели и оптимальное управление процессами фильтрации и деформации / Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 3. – С. 5–24.

14. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для одной модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости / Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2015. – Т. 7, № 3. – С. 22–29.

15. Manakova, N.A. The Asymptotics of Eigenvalues of a Differential Operator in the Stochastic Models with «White Noise»/ G.A. Zakirova, N.A. Manakova, G.A. Sviridyuk // Applied Mathematical Sciences. – 2014. – V. 8, № 175. – P. 8747–8754. (**Scopus**)

16. Manakova, N.A. An Optimal Control of the Solutions of the Initial-Final Problem for Linear Sobolev Type Equations with Strongly Relatively p-Radial Operator / N.A. Manakova, G.A. Sviridyuk // Semigroups of Operators – Theory and Applications. – Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer, 2015. – P. 213–224. (**Springer**)

Монография:

17. Манакова, Н.А. Задачи оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012. – 88 с.

Свидетельства о регистрации программ:

18. Численное моделирование процесса нелинейной диффузии: Свидетельство № 2015616525 / Манакова Н.А., Селиванова А.А. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2015616525; заявл. 23.04.2015; зарегистр. 11.06.2015, реестр программ для ЭВМ.

19. Численное моделирование неравновесной противоточной капиллярной пропитки в круге: Свидетельство № 2015617080 / Богатырева Е.А, Манакова Н.А. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2015617080; заявл. 15.05.2015; зарегистр. 30.07.2015, реестр программ для ЭВМ.

20. Численное исследование задачи оптимального управления для полулинейных моделей фильтрации: Свидетельство № 2015619266 / Манакова Н.А. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2015615719; заявл. 29.06.2015; зарегистр. 27.08.2015, реестр программ для ЭВМ.

21. Численное исследование задачи оптимального управления для полулинейных моделей соболевского типа: Свидетельство № 2015619265 / Манакова Н.А. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2015615720; заявл. 29.06.2015; зарегистр. 27.08.2015, реестр программ для ЭВМ.

Другие научные статьи:

22. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска / Н.А. Манакова // Вестник Магнитогорского государственного технического университета. Вып. 8. – Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. ун-та, 2005. – С. 113–122.

23. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для уравнения нелинейной диффузии / Н.А. Манакова // Оптимизация, управление, интеллект. – 2005. – № 3. – С. 90–98.

24. Манакова, Н.А. Необходимые и достаточные условия существования оптимального управления для динамических полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова // Вестник МаГУ. Математика. Вып. 9. – Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. ун-та, 2006. – С. 70–80.
25. Манакова, Н.А. Об одной модели оптимального управления уравнением Осколкова / Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2008. – № 27 (127), вып. 2. – С. 63–70.
26. Манакова, Н.А. Об одной модели оптимального управления уравнением электрического поля в полупроводнике / Н.А. Манакова // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2009. – Т. 16, № 5. – С. 891–892.
27. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями задачи Шоуолтера – Сидорова для одного уравнения соболевского типа / Н.А. Манакова, Е.А. Богонос // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 42–53.
28. Манакова, Н.А. Численное исследование процессов в модели Баренблатта – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // Вестник МаГУ. Математика. Вып. 15. – Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. ун-та, 2013. – С. 58–67.
29. Манакова, Н.А. Задача Коши для одного класса стохастических уравнений соболевского типа в пространстве «дифференцируемых шумов» / Н.А. Манакова // Вырожденные полугруппы и пропагаторы уравнений соболевского типа. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2014. – С. 52–58.
30. Манакова, Н.А. Исследование математической модели Баренблатта – Гильмана / Н.А. Манакова, Е.А. Богатырева // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. – М.: Ин-т проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. – С. 1502–1506.
31. Manakova, N.A. An Optimal Control to Solutions of the Showalter – Sidorov Problem for the Hoff Model of the Geometrical Graph / N.A. Manakova // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2014. – V. 1, № 1. – P. 26–33.

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета
Подписано в печать 21.09.2015. Формат 60×84 1/16. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 1,86. Тираж 150 экз. Заказ 453/541.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.