На правах рукописи

Дж. К. Т.

Аль Исави Джавад Кадим Тахир

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ТЕРМО- И ГИДРОДИНАМИКИ

05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Челябинск – 2017

Работа выполнена в ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
доцент Замышляева Алена Александровна.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Сукачева Тамара Геннадьевна,
ФГБОУ ВО «Новгородский государственный
университет им. Ярослава Мудрого»,
кафедра алгебры и геометрии,
зав. кафедрой

кандидат физико-математических наук,
Какушкин Сергей Николаевич
ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова»,
кафедра прикладной математики и вычислительной
техники, доцент

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
технический университет (ВГТУ)»

Защита состоится 03 июля 2017 г. в 14:00 на заседании диссертационного совета Д 212.298.14 при Южно-Уральском государственном университете по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, ауд. 1001.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета и на сайте http://www.susu.ru/ru/dissertation/d-21229814/al-isavi-dzhavad-kadim-tahir/.

Автореферат разослан 28 апреля 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, доцент А.В. Келлер

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящее время большое число работ посвящено изучению эволюционных математических моделей в различных прикладных задачах, в частности, в области гидродинамики, теории фазовых переходов, а также при описании процессов распада фаз вещества. Примерами таких моделей являются:

Математическая модель Дзекцера[1]

$$(\lambda - \Delta)\frac{\partial u}{\partial t} = (\beta\Delta - \alpha\Delta^2)u + f(t) \tag{1}$$

$$u = \Delta u = 0 \qquad \text{на} \quad \partial\Omega \times [0, \tau],$$

описывающая эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости, представляющая большой практический интерес в теории движения грунтовых вод.

Обобщенная модель Фишера – Колмогорова[2], основанная на уравнении вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\gamma\Delta^2 u + \Delta u + f(u), \qquad (x, t) \in \Omega \times (0, \tau], \tag{2}$$

с граничным условием $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0 \quad$ на $\quad \partial\Omega \times [0, \tau]$,
где $f(u) = u - u^3, \tau > 0$ и $\gamma > 0$ – коэффициент гипердиффузии. Уравнение (2) является обобщением классического уравнения Фишера – Колмогорова при $\gamma = 0$.

Модель диффузии четвертого порядка[3] с постоянным коэффициентом диффузии, основанная на уравнении

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta^2 u \tag{3}$$

с граничным условием $u = \Delta u = 0 \quad$ на $\quad \partial\Omega \times [0, \tau]$.

Математическая модель Кана – Хилларда[4]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta[F'(u) - \epsilon^2 \Delta u], \tag{4}$$

$$u = \Delta u = 0 \qquad \text{на} \quad \partial\Omega \times [0, \tau],$$

---

[1] *Дзекцер, Е.С.* Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью / Е.С. Дзекцер // ДАН СССР. – 1972. – Т. 202, № 5. – С. 1031–1033.

[2] *Collet, P.* Instabilities and Fronts in Extended Systems / P. Collet, J.P. Eckmann. – Princeton; N.-Y: Princeton University Press, 1980.

[3] *Allen, S.M.* A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening / S.M. Allen, J.W. Cahn // Acta Metall. – 1979. – № 27. – P. 1085–1095.

[4] *Cahn, J.W.* Free energy of a nonuniform system / J.W. Cahn, J.E. Hilliard // Journal of Chemical Physics. – 1958. – V. 28, № 2. – P. 258–267.

которая описывает процесс разделения фаз, т.е. механизм с помощью которого смесь двух или более веществ, разделяется на отдельные области с различным химическим составом и физическими свойствами.

Все математические модели, основанные на уравнениях (1), (2), (3) и (4), могут быть представлены как граничные задачи для уравнения вида

$$Q_n(\Delta)u_t = R_s(\Delta)u + f, \tag{5}$$

где $Q_n(\Delta)$, $R_s(\Delta)$ многочлены степени $n, s \in \mathbb{N}$ от оператора Лапласа $\Delta : W_q^{m+2}(\Omega) \to W_q^m(\Omega)$, а $W_q^m(\Omega)$ – пространства Соболева, $q \geq 1$, $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Здесь Ω ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$. Вектор-функция f описывает внешнее воздействие на систему. Отметим, что во всех приведенных моделях $n < s$.

Одним из наиболее часто используемых подходов исследования уравнений вида (5) является метод, который опирается на разложение искомой функции по собственным функциям оператора Лапласа и ее представлении с помощью коэффициентов этого разложения. В силу чего можно рассматривать аналог уравнения (5) в пространствах последовательностей (из коэффициентов ряда Фурье). Более того, для таких пространств возможно расширить множества значений параметров. Например, для пространств последовательностей ℓ_q возможен случай $0 < q < 1$ (когда пространство квазибанахово), который в пространствах функций рассматривать невозможно[5]. Преимущества использования квазинормированных пространств также отмечались при решении некоторых технических задач[6]. Исследованию математических моделей именно в квазибанаховых пространствах последовательностей посвящена диссертация, что отличает ее от предшествующих работ.

Самостоятельный интерес к таким пространствам, как к объекту исследования, появился сравнительно недавно, примером этого могут служить работы А.Б. Александрова[7], В.Л. Крепкогорского[8], Н. Кэлтона[9], кроме того, такие пространства возникают при исследовании абелевых групп в работе Й. Берга, Й. Лефстрема[2], и при решении прикладных задач, как, например, в работах

[5] *Rolewicz, S.* Metric Linear Spaces / S. Rolewicz. — Warsaw: PWN, 1985.

[6] *Вовк, С.М.* Постановка задач определения линейных параметров сигналов в квазиномированных пространствах / С.М. Вовк, В.Ф. Борулько // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. — 2010. — Т. 53, № 7. — С. 31–42.

[7] *Александров, А.Б.* Квазиномированные пространства в комплексном анализе: дис. ... док. физ-мат. наук / А.Б. Александров. – Ленинград, 1983.

[8] *Крепкогорский, В.Л.* Квазиномированные пространства функций, рационально аппроксимируемых в норме BMO / В.Л. Крепкогорский // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1990. — № 3.— С. 38–44.

[9] *Kalton, N.* Quasi-Banach Spaces / N. Kalton // Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. 2, Edit. by W. Johnson and J. Lindenstrauss. – Amsterdam: Elsevier, 2003. — P. 1099–1130.

С.Я. Новикова[10] и Дж.Д. Хардке[11].

Таким образом, изучение указанных математических моделей в квазибанаховых пространствах последовательностей является актуальным.

Постановка задачи. Пусть $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ – монотонная последовательность такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. Следуя Дж.К. Аль-Делфи[12], введем в рассмотрение квазисоболевы пространства последовательностей ℓ_q^m. Пусть далее $Q_n(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i\lambda^i$ и $R_s(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{s} d_j\lambda^j$ – многочлены с действительными коэффициентами, не имеющие общих корней, степеней n и s, соответственно, причем $n < s$ и $d_s c_n < 0$. Рассмотрим операторы $Q_n(\Lambda)u = \{Q_n(\lambda_k)u_k\}$, где $\{u_k\} \in \ell_q^{m+2n}$ и $R_s(\Lambda)u = \{R_s(\lambda_k)u_k\}$, $n \in \mathbb{N}$, где $\{u_k\} \in \ell_q^{m+2s}$. Положим $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2n}, \mathfrak{F} = \ell_q^m$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$. По построению оператор $Q_n(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, а оператор $R_s(\Lambda) \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $\operatorname{dom} R_s(\Lambda) = \ell_q^{m+2s}$.

Рассмотрим класс эволюционных уравнений

$$Q_n(\Lambda)\dot{u} = R_s(\Lambda)u \tag{6}$$

в квазисоболевых пространствах. Отметим, что все описанные ранее математические модели в дальнейшем редуцируются к уравнению вида (6). Аналитическое исследование указанного класса математических моделей проводится в рамках операторной теории уравнений соболевского типа. Положив $L = Q_n(\Lambda)$, $M = R_s(\Lambda)$, редуцируем уравнение (6) к абстрактному уравнению соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu. \tag{7}$$

Вектор-функция $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+;\mathfrak{U})$ называется решением уравнения (7), если при подстановке она обращает (7) в тождество. Решение $u = u(t)$ такого уравнения, удовлетворяющее условию

$$u(0) = u_0, \tag{8}$$

при заданном $u_0 \in \mathfrak{U}$, называется решением задачи Коши.

Известно, что задача Коши (8) для уравнения (7) не разрешима при произвольных начальных данных, поэтому для приложений целесообразным является рассмотрение также задачи Шоуолтера–Сидорова

$$P(u(0) - u_0) = 0, \tag{9}$$

[10] *Новиков, С.Я.* Об особенностях оператора вложения симметричных функциональных пространств на $[0, 1]$ / С.Я. Новиков // Математические заметки. — 1997. — Т. 62, вып. 4. — С. 549–563.

[11] *Hardtke, J.D.* A Remark on Condensation of Singularities / J.D. Hardtke // Journal of mathematical physics, analysis, Geometry. — 2013. — V. 9, № 4. — P. 448–454.

[12] *Аль-Делфи, Дж.К.* Квазисоболевы пространства ℓ_p^m / Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 107–109.

где P – проектор на образ разрешающей группы операторов уравнения (7). Отметим, что задача Шоуолтера–Сидорова в невырожденном случае совпадает с задачей Коши, а в вырожденном — может быть решена при произвольных начальных данных.

В работе изучается разрешимость начальных задач (8) и (9) как для уравнения (7), так и для неоднородного уравнения вида

$$L\dot{u} = Mu + f, \tag{10}$$

где $f : [0, \tau] \to \mathfrak{F}$ отвечает внешнему воздействию на систему. Подчеркнем, что при решении задачи (8), (10) необходимо дополнительное условие «согласования начальных данных».

Целью работы является аналитическое и численное исследование класса эволюционных математических моделей в квазисоболевых пространствах при описании гидро- и термодинамических процессов, с разработкой методов и алгоритмов численного решения и реализацией их в виде комплекса программ. Достижение поставленной цели реализуется решением следующих **задачи**:

1. Разработать аналитический метод исследования класса эволюционных математических моделей на основе теории вырожденных голоморфных полугрупп в квазибанаховых пространствах последовательностей; изучить качественные свойства решений в виде условий существования дихотомий с построением инвариантных пространств.

2. Исследовать в квазисоболевых пространствах аналоги математической модели Дзекцера; обобщенной математической модели Фишера – Колмогорова; математической модели диффузии четвертого порядка; математической модели Кана – Хилларда с начальными условиями Шоуолтера – Сидорова или Коши.

3. Разработать численный метод исследования задачи Коши для класса эволюционных математических моделей в квазисоболевых пространствах.

4. Разработать комплекс программ нахождения численного решения задачи Коши для моделей, рассматриваемых в квазисоболевых пространствах.

5. Провести вычислительные эксперименты для исследуемых математических моделей.

Методы исследования. В основе аналитического исследования вырожденных эволюционных уравнений лежит построение вырожденных разрешающих полугрупп операторов, дающих классическое решение задачи (7), (8). При построении теории вырожденных голоморфных полугрупп операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей в диссертации используются классические методы функционального анализа, теории линейных ограниченных операторов, спектральной теории. Для построения операторов разрешающих полугрупп, по аналогии с классическими результатами, используются преобразование Лапласа операторнозначных функций в квазибанаховых пространствах последовательностей и свойство метризуемости квазибанаховых пространств.

При численном исследовании класса эволюционных математических моделей получены приближенные решения на основе модифицированного проекционного метода. Сходимость приближенного решения к точному теоретически обоснована сходимостью соответствующих рядов.

Научная новизна заключается в полученных результатах:

В области математического моделирования:

Впервые проведены аналитическое и численное исследования класса эволюционных математических моделей в квазисоболевых пространствах при описании процессов в области термо- и гидродинамики. Создана теоретическая основа для качественного и численного исследования изучаемых моделей: доказана однозначная разрешимость задачи Коши и задачи Шоуолтера – Сидорова для эволюционных операторно-дифференциальных уравнений, а также получены условия существования экспоненциальных дихотомий решений.

В области численных методов:

Разработаны новые алгоритмы численных методов, использующие идеи проекционных методов, позволяющие находить приближенные решения изучаемых математических моделей в квазисоболевых пространствах. Установлена сходимость приближенных решений к точному.

В области комплексов программ:

Разработан комплекс программ нахождения приближенного решения задачи Коши для класса эволюционных математических моделей в квазисоболевых пространствах. Разработанный комплекс программ позволяет: проводить вычислительные эксперименты для изучаемых моделей как в квазисоболевых пространствах, так и в стандартных пространствах.

Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором лично. Достоверность полученных результатов обеспечена полными доказательствами всех утверждений, соответствующими современному уровню математической строгости.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертационной работы, полученные при исследовании математических моделей, вносят вклад в теорию линейных эволюционных операторно-дифференциальных уравнений в квазисоболевых пространствах, получены достаточные условия однозначной разрешимости задач Коши и Шоултера – Сидорова для эволюционного линейного операторно-дифференциального уравнения в квазибанаховых пространствах, построены численные методы решения задачи Коши для таких уравнений, показана сходимость численных методов. Алгоритмы численных методов реализованы программно и позволяют получать численное решение и наглядное представление о поведении приближенных решений эволюционных моделей термо- и гидродинамики с условием Коши в графическом виде. Результаты, полученные при исследовании математических моделей, применимы в гидродинамике, в термодинамике при изучении процессов фильтрации, плавления, кристаллизации, а также различных диффузионных процессов. Кроме того, полученные результаты создают основу для исследования других эволюционных математических моделей в квазисоболевых пространствах.

Апробация работы. Результаты работы апробированы на конференциях: Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2014), Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Сочи, 2015), Международной научной конференции «Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ» (Уфа, 2015), Ежегодных конференциях аспирантов и докторантов ЮУрГУ (Челябинск, 2014, 2015), Зимних воронежских математических школах (Воронеж, 2014, 2016), Международной научно-практической конференции «Приоритетные научные исследования и разработки» (Саратов, 2016). Результаты докладывались на семинаре профессора Г.А. Свиридюка.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в научных работах [1 – 12], при этом статьи [1 – 3] опубликованы в ведущих российских рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК, 2 статьи [1, 2] – в издании, индексируемом базой данных Web os Science, 5 статей [1 – 3, 6, 7] – в изданиях, индексируемых базой данных Zentralblatt Math. Список работ приводится в конце автореферата. В совместных с научным руководителем работах научному руководителю принадлежит постановка задачи, в диссертацию вошли только результаты, полученные ее автором.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Объем диссертации составляет 125 страниц. Список литературы содержит 115 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** приводится постановка задачи, ставится цель исследования, описываются методы исследования и обосновывается актуальность, теоретическая и практическая значимость проведенного исследования.

Первая глава содержит пять параграфов, в которых описаны эволюционные процессы термо- и гидродинамики, описаны квазисоболевы пространства и проведена редукция исследуемых процессов к абстрактным эволюционным уравнениям в этих пространствах. Все результаты данной главы на защиту не выносятся.

В **пп. 1.1 – 1.3** описаны математические модели Дзекцера, Кана – Хилларда и диффузии четвертого порядка, а также обобщенная математическая модель Фишера – Колмогорова.

В **п. 1.4** приведены понятия ограниченных, непрерывных, замкнутых операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей, а также результаты, полученные Дж.К. Аль-Делфи.

В **п. 1.5** даны определения и понятия квазисоболевых пространств, конструкция квазиоператора Лапласа, представленные в работах Дж.К. Аль-Делфи. Кроме того, здесь проведена редукция рассматриваемых моделей к абстрактному эволюционному уравнению в квазисоболевых пространствах.

Вторая глава посвящена аналитическим методам исследования класса эволюционных математических моделей в квазисоболевых пространствах и состоит из шести параграфов.

В **п. 2.1** рассмотрены свойства относительных резольвент в квазибанаховых пространствах последовательностей и введено понятие относительно секториального оператора.

Назовем оператор M *секториальным относительно* оператора L (или L-*секториальным*), если существуют константы $K > 0, \quad a \in \mathbb{R}, \quad \theta \in (\pi/2, \pi)$ такие, что сектор

$$S^L_{a,\theta}(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta, \quad \mu \neq a\} \subset \rho^L(M), \tag{11}$$

$$\text{и} \quad \max\{{}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}\left\|R^L_\mu(M)\right\|, \quad {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\left\|L^L_\mu(M)\right\|\} \leq \frac{K}{|\mu - a|} \quad \forall \mu \in S^L_{a,\theta}(M). \tag{12}$$

Здесь и далее символом ${}_{\mathfrak{V}}\|\cdot\|$ обозначена квазинорма в соответствующем пространстве $\mathfrak{V}$.

В **п. 2.2** доказано существование вырожденных голоморфных разрешающих полугрупп для однородного уравнения соболевского типа в квазисоболевых пространствах, расщепление пространств, действий операторов.

Отображение $V^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathfrak{U}))$ называется *полугруппой разрешающих операторов* (или просто *разрешающей полугруппой*) уравнения (7), если

(i) $U^s U^t = U^{s+t} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}_+$;

(ii) для любого $u_0 \in \mathfrak{U}$ функция $u(t) = U^t u_0$ будет решением этого уравнения.

Полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ называется *равномерно ограниченной*, если

$$\exists M > 0 \quad \forall t > 0 \quad {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}\|U^t\| \leq K;$$

аналитической, если она аналитически продолжима в некоторый сектор, содержащий луч $\mathbb{R}_+$.

Теорема 1 *(2.2.1) Пусть операторы* $L,\ M$ *такие, как выше, причем* $\mathrm{Re}\ \mu_k = \frac{R_s(\lambda_k)}{Q_n(\lambda_k)} \leq 0$. *Тогда* *(i) операторы L и M порождают на пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ голоморфные полугруппы $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ и $\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ соответственно, имеющие вид*

$$U^t=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^L_\mu(M)\,e^{\mu t}d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) \qquad F^t=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}) \tag{13}$$

при $t \in \mathbb{R}_+$, где контур $\Gamma \subset \rho^L(M)$ таков, что $|arg\mu| \to \theta$ при $\mu \to \infty$, $\mu \in \Gamma$.

(ii) Существуют единицы полугрупп, являющиеся проекторами $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ заданные формулами

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, & \text{если } \lambda_k \text{ не корень } Q_n(\lambda) \text{ для всех } k \in \mathbb{N}; \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{k\in\mathbb{N}:k=\ell} <.,e_k> e_k, & \text{если существует } \ell \in \mathbb{N} : \lambda_\ell \text{ – корень } Q_n(\lambda), \end{cases}$$

(проектор Q строится аналогично), расщепляющие пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ в прямые суммы

$$\mathfrak{U}=\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1, \qquad \mathfrak{F}=\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1;$$

(iii) Имеет место расщепление действий операторов $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $M_k \in Cl(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $k= 0,1$, существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$;

(iv) операторы $H=M_0^{-1}L_0$ ($G=L_0M_0^{-1}$) нильпотентны, а $S=L_1^{-1}M_1$: $\mathrm{dom}M\cap \mathfrak{U}^1 \to \mathfrak{U}^1$ и $T=M_1L_1^{-1}$:$M[\mathrm{dom}M] \cap \mathfrak{F}^1 \to \mathfrak{F}^1$ секториальны.

П. 2.3 содержит исследование однозначной разрешимости обобщенной задачи Шоуолтера – Сидорова для эволюционного уравнения соболевского типа в квазисоболевых пространствах. Введено понятие фазового пространства для исследуемого уравнения в квазисоболевых пространствах.

Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется *фазовым пространством* уравнения (7), если

(i) любое решение $v(t)$ уравнения (7) лежит в $\mathfrak{P}$, т.е. $v(t) \in \mathfrak{P} \quad \forall t \geq 0$;

(ii) для любого $v_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (7),(8).

Теорема 2 *(2.3.2) Множество $\mathfrak{U}^1 = \overline{\mathrm{im}R^L_\mu(M)} = \mathrm{im}U^\bullet$ является фазовым пространством уравнения* (7).

В **п. 2.4** исследована разрешимость задачи Коши для неоднородных уравнений рассматриваемого класса.

Теорема 3 *(2.4.2) Пусть операторы L, M определены выше, вектор-функция $f(t)$ аналитична на $[0,\tau]$. Тогда для любого начального значения*

$$u_0 \in \mathcal{P}_f = \{u \in \mathrm{dom}M : (I-P)u = -M_0^{-1}(I-Q)f(0)\}$$

существует единственное решение $u \in C^1((0,\tau];\mathfrak{U})$ задачи (8),(10), *имеющее вид*

$$u(t) = U^t u_0 + \int\limits_0^t U^{t-s}L_1^{-1}Qf(s)ds - M_0^{-1}(I-Q)f(t).$$

Пп. 2.5 и 2.6 содержат аналитические исследования модели Дзекцера и обобщенной модели, включающей математические модели Кана – Хилларда, Фишера – Колмогорова и модель диффузии четвертого порядка в квазисоболевых пространствах. Для математической модели Дзекцера справедливо

Следствие 1 *(2.5.2) При любых $m, \lambda, \beta \in \mathbb{R}$, $\tau, q, \alpha \in \mathbb{R}_+$, $u_0 \in \mathfrak{U}$, функциях $f^0 \in C^1((0,\tau);\mathfrak{F}^0)$ и $f^1 \in C((0,\tau);\mathfrak{F}^1)$ существует единственное решение $u \in C^1((0,\tau);\mathfrak{U})$ задачи* (8) *для уравнения $(\lambda+\Lambda)u_t = (-\alpha\Lambda^2+\beta\Lambda)u+f$, имеющее вид $u(t) = -M_0^{-1}f^0(t) + U^t u_0 + \int_0^t U^{t-s}L_1^{-1}f^1(s)ds$, где*

$$\mathfrak{F}^0 = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } \lambda_k \neq -\lambda \text{ при всех } k \in \mathbb{N}; \\ \{f \in \mathfrak{F}: f_k = 0,\ k \in \mathbb{N}\setminus\{\ell: \lambda_\ell = -\lambda\}\}. \end{cases}$$

$$\mathfrak{F}^1 = \begin{cases} \mathfrak{F}, & \text{если } \lambda_k \neq -\lambda \text{ при всех } k \in \mathbb{N}; \\ \{f \in \mathfrak{F}: f_k = 0, \lambda_k = -\lambda\}. \end{cases}$$

$$M_0^{-1} = \begin{cases} \mathbb{O}, & \text{если } \lambda_k \neq -\lambda \text{ при всех } k \in \mathbb{N}; \\ \sum\limits_{k\in\mathbb{N}:\lambda_k=-\lambda} (\alpha\lambda_k^2+\beta\lambda_k)^{-1}e_k. \end{cases}$$

$$U^t = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k t}<\cdot, e_k>e_k, & \text{если } \lambda_k \neq -\lambda; \\ \sum\limits_{k\in\mathbb{N}:k\neq\ell} e^{\mu_k t}<\cdot, e_k>e_k, & \text{если } \lambda_\ell = -\lambda. \end{cases}$$

$$L_1^{-1} = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda-\lambda_k)^{-1}<\cdot, e_k>e_k, & \text{если } \lambda_k \neq -\lambda \text{ при всех } k \in \mathbb{N}; \\ \sum\limits_{k\in\mathbb{N}:k\neq\ell} (\lambda-\lambda_k)^{-1}<\cdot, e_k>e_k, & \text{если } \lambda_\ell = -\lambda. \end{cases}$$

Здесь $\mu_k = (\alpha\lambda_k^2+\beta\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)^{-1}$.

Рассмотрим модели Фишера – Колмогорова, Канна – Хилларда и диффузии четвертого порядка в рамках уравнения

$$u_t = (-\alpha\Lambda^2 + \beta\Lambda + \gamma)u + f, \quad \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}_+, \tag{14}$$

в квазисоболевых пространствах $\mathfrak{U} = \ell_q^m$ и $\mathfrak{F} = \ell_q^m$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$.

Следствие 2 *(2.6.2) При любых $m, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\tau, q, \alpha \in \mathbb{R}_+$, $u_0 \in \mathfrak{U}$, $f \in C((0,\tau);\mathfrak{F})$ существует единственное решение $u \in C^1((0,\tau);\mathfrak{U})$ задачи* (8) *для уравнения* (14)*, которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k t}<u_0, e_k>e_k + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k(t-s)}<f(s), e_k>e_k ds,$$

где $\mu_k = -\alpha\lambda_k^2 + \beta\lambda_k + \gamma$.

Третья глава состоит из шести параграфов и посвящена изучению свойств решений класса эволюционных математических моделей, а также их численному исследованию. В **п. 3.1** доказана относительно спектральная теорема в квазисоболевых пространствах в относительно секториальном случае и получены условия, при которых существуют инвариантные пространства для пары эквивалентных уравнений соболевского типа. Доказана теорема о том, что при определенных условиях решения пары эквивалентных уравнений соболевского типа обладают экспоненциальной дихотомией.

В **п. 3.2** изучаются свойства решений моделей Дзекцера, и обобщенной модели, включающей модели Кана – Хилларда, Фишера – Колмогорова и модель диффузии четвертого порядка в квазисоболевых пространствах.

П. 3.3 содержит описание алгоритмов построения приближенного решения эволюционных математических моделей как в квазисоболевых, так и в банаховых пространствах. Для нахождения приближенного решения $\tilde{v}(t)$ используется представление

$$\tilde{u}(t) = \sum_{k=1}^{N} u_k(t) e_k \tag{15}$$

где $N \in \mathbb{N}$, необходимо, брать таким, чтобы, во-первых, учесть вырожденность уравнения и, во-вторых, достичь требуемой точности ε. Выражение (15) для $u^N(x,t)$ подставляется в (6), в результате получается конечная система уравнений. В зависимости от параметров математической модели, уравнения в ней являются дифференциальными или алгебраическими. После проверки принадлежности начальных данных фазовому пространству, находятся функциональные коэффициенты $u_k(t), k = 1, ..., N$ (с начальными условиями или без них).

Отметим, что разработанный численный метод позволяет находить приближенное решение в квазисоболевых пространствах по начальной последовательности с заданной точностью. Кроме того, если параметр квазинормы $q \geq 2$, метод применим для нахождения приближенного решения различных эволюционных математических моделей в пространствах Соболева.

В **п. 3.4** описываются программы, реализующие алгоритмы, описанные в п. 3.3. Разработанная программы позволяет:

1. Ввести многочлены от квазиоператора Лапласа и рассмотреть эволюционные математические модели в квазисоболевых пространствах.

2. Учесть вырожденность математической модели и применить метод фазового пространства.

3. Найти необходимое для достижения заданной точности ε количество ненулевых членов приближенного решения.

4. Найти и вывести приближенное решение задачи.

5. Получить графическое изображение компонент полученного решения в зависимости от времени.

Пункты 3.5 и 3.6 содержат результаты вычислительных экспериментов, иллюстрирующие разработанные численные методы.

Пример 1 Требуется найти численное решение математической модели (6), (8), где $Q_1(\lambda) = 2 - \lambda$, $R_2(\lambda) = \lambda^2$, $\lambda_k = k^2$, начальная последовательность $u_0 = \{u_{0k}\} = \{\frac{1}{k^2}\}$, $q = 0.5$, $m = 1$, $T = 0.5$. Для $\varepsilon = 0.1$ получены следующие результаты:
$\widetilde{u}(t)$=(e^t, 0.25 e^{-8t}, 0.11 $e^{-11.57t}$, 0.06 $e^{-18.29t}$, 0.04 $e^{-27.17t}$, 0, 0, ..., 0,...).

Так как $\mu_1 = 1 > 0$, то уравнение (6) обладает экспоненциальной дихотомией. График решения изображен на рисунке 1.

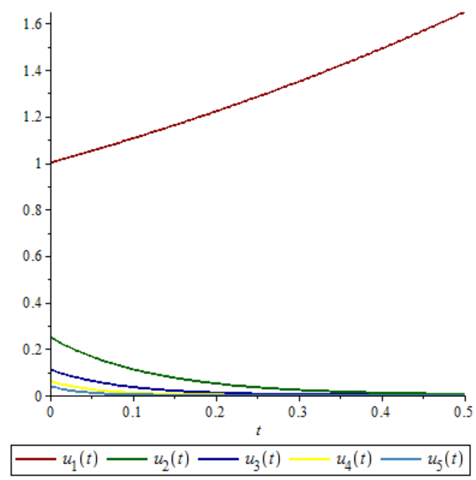

Рис. 1: Компоненты решения из примера 1

Представим результаты вычислительных экспериментов для математической модели Дзекцера

$$(\lambda - \Delta)w_t = (\beta\Delta - \alpha\Delta^2)w, \qquad \lambda, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}_+ \tag{16}$$

$$w(x,0) = w_0(x), \quad x \in [0,l] \tag{17}$$

$$w(0,t) = w(l,t) = w_{xx}(0,t) = w_{xx}(l,t) = 0, \quad t \in [0,\tau] \tag{18}$$

в банаховых пространствах $\mathfrak{U} = W_2^{m+2}(0,l)$ и $\mathfrak{F} = W_2^m(0,l)$, $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.
Пример 2 Требуется найти численное решение математической модели (16) – (18), где $\lambda = -4$, $\beta = 0$, $\alpha = 1, m = 1, l = \pi, \tau = 0.4$, начальная функция $w_0(x) = \sin x + 3\sin 2x$. Математическая модель (16) – (18) вырождена. В этом случае начальная функция не принадлежит фазовому пространству уравнения (16), программа выдает сообщение: «Нет решений».

Пример 3 Требуется найти численное решение математической модели (16) – (18), где $\lambda = -4$, $\beta = 0$, $\alpha = 1, m = 1, l = \pi, \tau = 0.4$, начальная функция

$w_0(x) = \sum\limits_{k\neq 2} \frac{1}{k^2} \sin kx$. Очевидно, что $\lambda_k = k^2$ и $\varphi_k = \sin kx$ являются собственными значениями и и собственными функциями оператора $-\Delta$ с однородным граничным условием Дирихле. Математическая модель (16) – (18) вырождена, причем начальная функция принадлежит фазовому пространству уравнения (16). Тогда при заданной точности $\varepsilon = 0.1$ в результате работы программы получаем $\widetilde{u}(t)$=($e^{0.33t}$, 0, $0.11e^{-16.2t}$, 0, 0,..., 0,...) – коэффициенты приближенного решения. На рисунке 2 представлены их графики. Так как $\mu_1 = 0.33 > 0$, то уравнение (16) обладает экспоненциальной дихотомией, первая компонента решения растет, остальные – убывают. Приближенное решение (16) – (18) имеет вид $\tilde{w}(x,t)$=$e^{0.33t} \sin x + 0.11e^{-16.2t} \sin 3x$, его график изображен на рисунке 3.

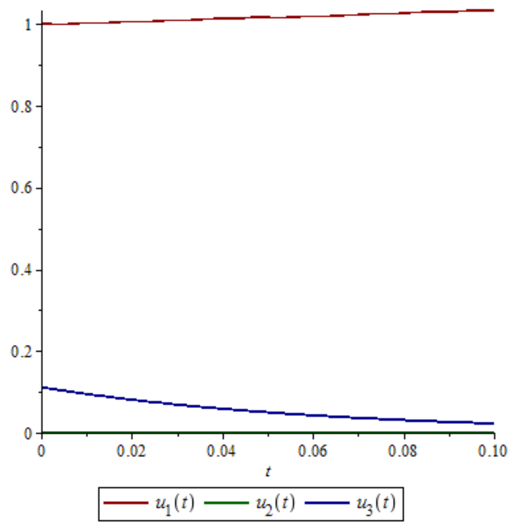

Рис. 2: Коэффициенты решения из примера 3

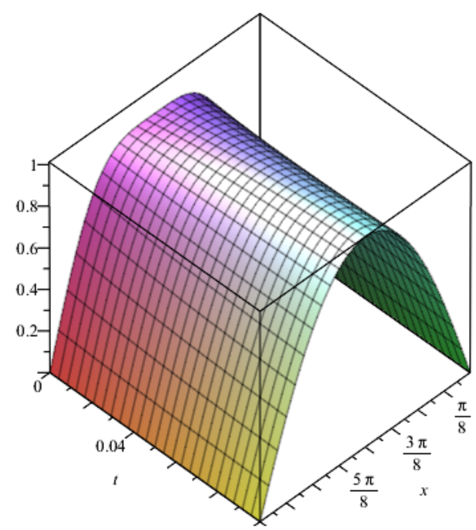

Рис. 3: График решения примера 3

В заключении представлены выводы о результатах исследования, а также указаны рекомендации по использованию научных выводов и перспективы развития тематики работы.

Результаты выносимые на защиту:

В рамках развития качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей получены:

1. Достаточные условия существования решений аналогов моделей Дзекцера, Фишера – Колмогорова, диффузии 4-го порядка и Кана – Хилларда в квазисоболевых пространствах с различными начальными условиями.

2. Достаточные условия существования решений класса эволюционных математических моделей с начальным условием Шоуолтера – Сидорова или Коши в квазисоболевых пространствах.

3. Достаточные условия существования инвариантных пространств решений и их дихотомий для аналогов моделей Дзекцера, Фишера – Колмогорова, диффузии 4-го порядка и Кана – Хилларда в квазисоболевых пространствах.

4. Достаточные условия существования инвариантных пространств решений и их дихотомий для класса эволюционных математических моделей в квазисоболевых пространствах.

В рамках разработки, обоснования и тестирования эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий получены:

5. Алгоритм численного метода исследования класса эволюционных математических моделей в квазисоболевых пространствах. 6. Сходимость численного метода приближенного решения математических моделей в рамках задачи Коши для класса эволюционных математических моделей в квазисоболевых пространствах.

В рамках реализации эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов получены:

7. Программа, реализующая алгоритм численного метода исследования класса эволюционных математических моделей в квазисоболевых пространствах.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки РФ для опубликования результатов диссертационного исследования:

1. *Замышляева, А.А.* On Some Properties of Solutions to One Class of Evolution Sobolev Type Mathematical Models in quasi-Sobolev Spaces / А.А. Замышляева, Дж.К. Аль Исави // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 113–119. (WoS, ВАК)

2. *Al-Isawi, J.K.T.* Computational Experiment for One Class of Evolution Mathematical Models in quasi-Sobolev Spaces / J.K.T. Al-Isawi, A.A. Zamyshlyaeva // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2016. – Т. 9, № 4. – С. 141–147. (WoS, ВАК)

3. *Al-Isawi, J.K.T.* Computational Experiments for One Class of Mathematical Models in Thermo- and Hydrodynamics / J.K.T. Al-Isawi // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2017. – V. 4, № 1. – P. 16–26. (Zentralblatt Math)

Свидетельство о регистрации программы:

4. *Аль Исави Дж.К.* Численное исследование одного класса эволюционных уравнений в квазисоболевых пространствах. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2017610833, заявл. 24.11.2016; зарегистр. 18.01.2017, реестр программ для ЭВМ.

Другие научные публикации:

5. *Замышляева, А.А.* Голоморфные вырожденные полугруппы операторов и эволюционные уравнения соболевского типа в квазисоболевых пространствах последовательностей / А.А. Замышляева, Дж.К. Аль Исави // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика, механика, физика. – 2015. – Т. 7, № 4. – С. 31–40. (RSI)

6. *Al Isawi, J.K.* On Some Properties of Solutions to Dzektser Mathematical Model in Quasi-Sobolev Spaces / J.K. Al Isawi // Journal of Computational and Engineering Mathematics – 2015. – Vol.2, № 4. – P. 27–36. (Zentralblatt Math)

7. *Al-Isawi, J.K.T.* On kernels and images of resolving analytic degenerate semigroups in quasi-Sobolev spaces / J.K.T. Al-Isawi // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2016. – V. 3, № 1. – P. 10–19. (Zentralblatt Math)

8. *Аль Исави, Дж.К.* Линейные замкнутые операторы в квазибанаховых пространствах / Дж.К. Аль Исави // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна–2014». – Воронеж, 2014. – С. 18–21.

10. *Аль Исави, Дж.К.* Линейные уравнения соболевского типа с относительно p-секториальными операторами в квазибанаховых пространствах / Г.А. Свиридюк, Дж.К. Аль Исави // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. – М: МИАН, 2014. – С. 25.

11. *Аль Исави, Дж.К.* Об одном классе эволюционных уравнений соболевского типа в квазисоболевых пространствах последовательностей / Дж.К. Аль Исави // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна–2016». – Воронеж, 2016. – С. 47–50.

12. *Аль Исави, Дж.К.* Об инвариантных пространствах и экспоненциальных дихотомиях решений уравнения Дзекцера в квазисоболевых пространствах / Дж.К. Аль Исави // Сборник статей Международной научно-практической конференции «Приоритетные научные исследования и разработки (г. Саратов)». – Уфа: МЦИИ ОМЕГА САЙНС, 2016. – Ч. 2 – С. 3–4.

Типография «Два комсомольца»

Подписано в печать 26.04.2017. Формат 60 × 84 1/16.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 1. Уч.-изд. л. 2.
Тираж 100 экз. Заказ 142/456

Отпечатано в типографии «Два комсомольца».
454008, г. Челябинск, Комсомольский пр., 2