МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДАЮ
Первый проректор - проректор
по научной работе

________________ А.В. Коржов

«______»_______________2022 г.

ПРОГРАММА

кандидатского экзамена по специальной дисциплине:

Научная специальность: 1.1.5. «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»

(физико-математические науки)

Разработчики:

1.______________________*Замышляева А.А., д.ф.-м.н., профессор, директор ИЕТН*

2.______________________*Зюляркина Н.Д., д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры ПМиП*

Челябинск 2022 г.

Содержание программы

1. **Перечень тем для подготовки к кандидатскому экзамену**

    1.1. Элементы математической логики

    1.2. Элементы теории алгоритмов

    1.3. Основные алгебраические структуры

    1.4. Теория конечных групп

    1.5. Теория чисел

    1.6. Булева алгебра

    1.7. Теория графов

2. **Вопросы для подготовки к сдаче кандидатского экзамена с учетом отрасли науки**

Математическая логика и теория алгоритмов

1. Понятие алгоритма и его уточнения. Вычислимость по Тьюрингу. Тезис Чёрча.
2. Понятие алгоритма и его уточнения. Частично рекурсивные функции.
3. Рекурсивно перечислимые и рекурсивные (разрешимые) множества. Их свойства.
4. Универсальные вычислимые функции. Существование перечислимого неразрешимого множества.
5. Алгоритмические проблемы. Построение полугруппы с неразрешимой проблемой распознавания равенства.
6. Классы P и PN. Полиномиальная сводимость и NP-полные задачи.
7. Логика высказываний. Представимость булевых функций формулами логики высказываний. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы.
8. Исчисление высказываний. Полнота и непротиворечивость.
9. Логика предикатов. Приведение формул логики предикатов к предварённой нормальной форме.
10. Исчисление предикатов. Непротиворечивость.
11. Теорема о дедукции для исчисления предикатов.
12. Полнота исчисления предикатов.
13. Теорема Мальцева о компактности.
14. Элементарные теории классов алгебраических систем. Категоричные в данной мощности теории. Теорема о полноте теории, не имеющей конечных моделей и категоричной в бесконечной мощности.
15. Разрешимые теории. Теория плотного линейного порядка.
16. Формальная арифметика. Теорема о представимости вычислимых функций в формальной арифметике (без доказательства).
17. Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики.
18. Теорема Тарского о невыразимости арифметической истинности в арифметике.
19. Неразрешимость алгоритмической проблемы выводимости для арифметики.
20. Неразрешимость алгоритмической проблемы выводимости для логики предикатов.
21. Аксиоматическая теория множеств.
22. Порядковые числа, принцип тринсфинитной индукции. Аксиома выбора.

Алгебра

1. Порождающие и непорождающие элементы групп. Подгруппа Фраттини. Подгруппы Фраттини циклических, симметрических, квазициклических групп, группы рациональных чисел. Порядок элемента группы.

2. Порождающие множества, порождающие множества линейных групп, квазициклических групп, симметрических и знакопеременных групп, порождаемость симметрической группы множеством транспозиций.
3. Нормализатор и централизатор множества элементов группы.
4. Нильпотентные группы. Верхний и нижний центральный ряды в группе. Нильпотентность конечных p групп.
5. Гомоморфизм, изоморфизм, теоремы о гомоморфизмах.
6. Теорема Фиттинга и подгруппа Фиттинга.
7. Конечные нильпотентные группы, теоремы Бернсайда, Виланда и Фраттини.
8. Теоремы Силова.
9. Простота группы A_n, n ≥ 5.
10. Простота группы SO_3.
11. Евклидовы кольца – кольца главных идеалов. Факториальность колец главных идеалов.
12. Основные понятия теории модулей: теорема о гомоморфизме; свободные модули; циклические модули над кольцом главных идеалов.
13. Теорема о строении конечно-порожденных модулей над евклидовым кольцом.
14. Следствия основной теоремы о конечно-порожденных модулях над евклидовым кольцом для групп и линейных операторов.
15. Свободные группы и определяющие соотношения. Подгруппы свободных групп.
16. Алгебраические расширения полей. Теорема о примитивном элементе. Поле разложения многочлена. Основная теорема теории Галуа.
17. Конечные поля, их подполя и автоморфизмы.
18. Радикал кольца, его нильпотентность в артиновых кольцах.
19. Теорема плотности. Простые и полупростые кольца с условием минимальности.
20. Группа Брауэра.
21. Теорема Фробениуса об алгебрах с делением.
22. Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе.
23. Разрешимые алгебры Ли. Теорема Ли. Примеры простых алгебр Ли.
24. Теорема Биркгофа-Витта.
25. Основные понятия теории линейных и матричных представлений: приводимость; изоморфизм; гомоморфизм.
26. Теорема Машке. Лемма Шура.
27. Регулярное представление. Кратность неприводимого представления.
28. Неприводимые представления абелевых групп. Одномерные представления.
29. Характеры представлений, их свойства. Следствия соотношения ортогональности.
30. Доказательство соотношений ортогональности.
31. Свободные алгебры. Многообразие алгебр. Примеры многообразий для основных алгебраических структур.
32. Теорема Биркгофа.
33. Решетки. Дедекиндовы решетки. Решетки идеалов в кольцах и нормальных подгрупп в группах.
34. Дистрибутивные решетки и булевы алгебры. Теорема Стоуна.
35. Структура конечных симплектических пространств.
36. Базис Шевалле.
37. Построение групп Шевалле.
38. Автоморфизмы групп Шевалле.
39. Системы корней.

Теория чисел

1. Непрерывные дроби, алгоритм Евклида.
2. Функция Мёбиуса.
3. Функция Эйлера.
4. Теоремы Эйлера и Ферма.
5. Сравнения второй степени. Символ Лежандра. Символ Якоби.
6. Квадратичный закон взаимности.
7. Первообразные корни и индексы.
8. Неравенства Чебышева для функции $\pi(x)$.
9. Характеры Дирихле, и их простейшие свойства.
10. L - функции Дирихле суммы характеров.
11. Доказательство утверждения $L(1, X) \neq 0$.
12. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии.
13. Тригонометрические суммы. Модуль гауссовой суммы.
14. Полные тригонометрические суммы и число решений сравнений.
15. Критерий Вейля равномерного распределения.
16. Теорема Вейля о последовательности значений многочлена.
17. Модулярная группа.
18. Модулярные формы. Теорема о строении алгебры модулярных форм.
19. Модулярный инвариант, поле модулярных функций.
20. Представление целых чисел унимодулярными квадратичными формами.
21. Приближение вещественных чисел рациональными числами. Теорема Дирихле.
22. Теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными дробями. Примеры трансцендентных чисел.
23. Трансцендентность числа e.
24. Трансцендентность π.

Дискретная математика

1. Множества. Теоретико-множественные преобразования.
2. Реляционная алгебра.
3. Нечёткие множества. Операции над нечёткими множествами.
4. Аксиомы булевой алгебры.
5. Теоремы поглощения, склеивания, де Моргана.
6. Понятие булевой функции. Минтермы.
7. Совершенная дизъюктивная нормальная форма. Карты Вейча.
8. Совершенная конъюктивная нормальная форма. Теорема разложения для КНФ.
9. Граф-схема булевой функции.
10. Числовое представление булевых функций.
11. Функции, определяемые порогом при неизменных весах. Теоремы о пороговых функциях.
12. Аксиомы алгебры Жегалкина.
13. Карты Вейча в алгебре Жегалкина.
14. Разложение булевых функций в ряд Тейлора.
15. Комбинационные схемы и булевы функции ДНФ и КНФ.
16. Коды Хэмминга.
17. Рефлексные коды. Коды Грея.

18. Функциональная полнота. Теорема Поста о функциональной полноте.
19. Независимое множество, минимальная раскраска, вершинное покрытие, клика, паросочетание, рёберное покрытие.
20. Достаточное условие существования цикла.
21. Способы задания графа: перечисление элементов, рисунок, матрица смежности, матрица инцидентности, матрица Кирхгофа, их свойства, связь между ними.
22. Несколько приложений теории планарных графов: описание правильных трёхмерных многогранников, общее свойство фулеренов, задача о раскраске политической карты.
23. Понятие «почти все графы», его иллюстрация на примерах нескольких графовых свойств.
24. Метод увеличивающих цепей для решения задачи о наибольшем паросочетании.
25. Теорема Рамсея.
26. Задача об изоморфизме. Количество помеченных деревьев, верхняя оценка числа неизоморфных корневых деревьев.
27. Пространство остовных подграфов графа, пространство квазициклов и пространство разрезов графа, их базисы и размерности.
28. Критерии Куратовского-Понтрягина и Вагнера для планарности графа.
29. Лемма о рукопожатиях.
30. Триангулированные (хордальные) графы, их важнейшие свойства: наличие симплициальной вершины, плотность любого минимального разделяющего множества вершин.
31. Число вершинной связности и число рѐберной связности графа, взаимоотношение между ними. Дерево блоков и сочленений графа.
32. Понятие кографа. Критерий кографа в терминах запрещённого порождённого подграфа.
33. Теорема о характеризации наследственного класса в терминах минимальных запрещѐнных порождѐнных подграфов.
34. Двудольные графы, теорема Кѐнига.
35. Основные свойства деревьев.
36. Однородные графы, свойства их матрицы смежности.
37. Способы кодирования: код Прюфера, лексикографический и бинарный коды, массив предшественников.
38. Взаимоотношение между задачами, алгоритмические сложности их решения.
39. Критерий наличия в графе перешейка
40. Теорема Эйлера о количестве граней связного планарного графа. Следствия из теоремы Эйлера: верхние оценки на число рѐбер планарных графов
41. Собственные значения сильно регулярных графов
42. Графы Шилла

3. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

3.1. Основная литература

3.1.1. Бухштаб, А. А. Теория чисел : учебное пособие для вузов / А. А. Бухштаб. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 384 с. — ISBN 978-5-8114-9228-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/189329 (дата обращения: 23.05.2022). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

3.1.2. Шевелев, Ю. П. Дискретная математика : учебное пособие / Ю. П. Шевелев. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 592 с. — ISBN 978-5-8114-4284-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/206510 (дата обращения: 23.05.2022). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

3.1.3. Глухов, М. М. Математическая логика. Дискретные функции. Теория алгоритмов : учебное пособие / М. М. Глухов, А. Б. Шишков. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 416 с. — ISBN 978-5-8114-1344-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/168441 (дата обращения: 23.05.2022). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

3.1.4. Курош, А. Г. Теория групп : справочник / А. Г. Курош. — 4-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 648 с. — ISBN 5-8114-0616-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/167708 (дата обращения: 23.05.2022). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

3.1.5. Курош, А. Г. Лекции по общей алгебре : учебник для вузов / А. Г. Курош. — 5-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 556 с. — ISBN 978-5-507-44067-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/208670 (дата обращения: 23.05.2022). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

3.1.6. Кострикин, А. И. Введение в алгебру : учебник / А. И. Кострикин. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, [б. г.]. — Часть 3 : Основные структуры — 2001. — 272 с. — ISBN 5-9221-0019-X. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/59284 (дата обращения: 23.05.2022). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

3.2. Дополнительная литература

3.2.1. Глухов, М. М. Алгебра : учебник для вузов / М. М. Глухов, В. П. Елизаров, А. А. Нечаев. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 608 с. — ISBN 978-5-8114-9182-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/187793 (дата обращения: 23.05.2022). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

3.2.2. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры : учебник для вузов / А. Г. Курош. — 23-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 432 с. — ISBN 978-5-8114-9033-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/183725 (дата обращения: 23.05.2022). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

3.2.3. Гашков, С. Б. Дискретная математика. Учебник для вузов : учебник для вузов / С. Б. Гашков. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 456 с. — ISBN 978-5-8114-8691-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/193306 (дата обращения: 23.05.2022). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

3.2.4. Виноградов, И. М. Основы теории чисел : учебное пособие / И. М. Виноградов. — 14-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 176 с. — ISBN 978-5-8114-5329-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/139285 (дата обращения: 23.05.2022). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

3.2.5. Ершов, Ю. Л. Математическая логика : учебное пособие / Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин. — 6-е изд. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 356 с. — ISBN 978-5-9221-1301-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/59599 (дата обращения: 23.05.2022). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

4. Условия допуска к экзамену

К сдаче кандидатских экзаменов допускаются аспиранты, а также лица, имеющие высшее образование, подтвержденное дипломом специалиста или магистра, прикрепленные для подготовки диссертации на соискание ученой степени кандидата наук, сдачи кандидатских экзаменов без освоения программ подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре.

5. Процедура проведения экзамена

Экзамен проводится в устной форме с обязательным составлением развернутых ответов на специально подготовленных для этого бланках. В каждом билете содержится по три вопроса. Для ответа на билеты аспиранту/прикреплённому лицу предоставляется возможность подготовки в течение 1 часа. На экзамене аспиранту/прикреплённому лицу предоставляется право пользоваться необходимыми справочными материалами, учебной и научной литературой. Продолжительность устного ответа на экзамене, как правило, не должна превышать 30 минут. После ответа на основные вопросы билета аспиранту/прикреплённому лицу задаются дополнительные вопросы в рамках тематики программы экзамена. Результаты кандидатского экзамена объявляются аспиранту/прикреплённому лицу в тот же день после оформления протоколов заседания комиссии.