Южно-Уральский государственный университет

СОВЕТ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЕВЯТАЯ ЗАОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
2007 год

1. Пусть A - вырожденная квадратная матрица – $|A| = 0$., Докажите, что векторы $\mathbf{A_i}$ и $\mathbf{A_j}$, состоящие из алгебраических дополнений к элементам, соответственно i-ой и j-ой строк, коллинеарны.

2. Системы линейных уравнений $Ax = y$ и $By = x$ равносильны. Здесь $A = ||a_{ji}||,\ B = ||b_{ij}||,\ x = (x_i),\ y = (y_j),\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m$. Докажите, что матрицы A и B взаимно обратны.

3. Существует ли функция $f(x)$ такая, что $f(f(x)) = x^2 - 1\ \forall x \in \mathbb{R}$?

4. Функция $x(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, 1]$ и обращается в ноль на концах этого промежутка: $x(0) = x(1) = 0$. Установите справедливость неравенства

$$\int\limits_0^1 x^2 dt \le \frac{1}{\pi^2} \int\limits_0^1 (x')^2 dt.$$

5. Найдите объем тела, ограниченного поверхностью

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 8)^2 = 36(x^2 + y^2).$$

6. Установите, что на линии, заданной уравнением $x^3+3xy+y^3 = 1$, существует единственная тройка точек A, B, C таких, что треугольник с вершинами в этих точках – равносторонний. Найдите площадь указанного треугольника.

7. Известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными a_n расходится. Что можно сказать о сходимости рядов

7.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$? **7.2** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + na_n}$? **7.3** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + n^2 a_n}$?

8. Существует ли решение задачи

$$y(0) = 0, \quad y' = x + y^2, \quad \forall x \in\ (0, 3)?$$

Да – найдите его, нет – докажите, что не существует.

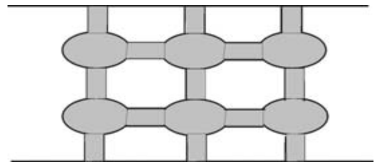
9. Пусть $P(x)$ — многочлен степени не выше четвёртой и такой, что

$$\forall x \in [-1; 1]\ \ P(x) \le 1, \quad P(1) = P(-1) = 0,\ P(0) = 1$$

Найдите максимальное значение интеграла $\int\limits_{-1}^{1} P(t)dt$.

10. На реке расположено шесть островов, соединенных мостами друг с другом и с берегами. В результате шторма мосты могут разрушаться независимо друг от друга с вероятностью 0.5.

Какова вероятность того, что после шторма можно будет перебраться с одного берега реки на другой?



11. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы, положительны и одинаково распределены, $k < n$ – положительное целое. Докажите, что

$$M\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_k}{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}\right) = \frac{k}{n}.$$

12. Пусть $x_1 = a$ и $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$ (для любого натурального n). Укажите те значения параметра a, при которых последовательность $\{x_n\}$ сходится.

Порядок выполнения работы и награждения победителей.

1. Задания выполняются в произвольном порядке. Решение каждой задачи оформляется на отдельном листе (листах). Каждая задача подписывается автором - *Фамилия, имя, группа, факультет.*

2. Решения задач должны быть сданы для проверки в ауд. 720 гл. корпуса в срок **не позднее пятницы 16 марта 2007 года**.

3. В срок до 1 апреля 2007 года решатели задач будут приглашены для заслушивания и обсуждения решений, после чего Жюри олимпиады определит победителей и призеров.

4. Для победы в олимпиаде совершенно необязательно решать все предложенные задачи. Решите любую, но правильно. Тем не менее, количество решенных задач является немаловажным фактором в определении победителей.

5. Победителей и призеров олимпиады ожидают

– чувство глубокого морального удовлетворения, а также материальное поощрение и другие почести и награды .

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!